This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

QB
401
.M61

AP ~~[illegible]~~

25583

QB405
M61

A. T.
Plum.

PHILLIPS LIBRARY

OF

HARVARD COLLEGE OBSERVATORY.

c.c.

RECHERCHES

SUR

SATURNE

SES ANNEAUX ET SES SATELLITES

D'APRÈS

les observations faites à l'équatorial de dix pouces d'ouverture
de l'Observatoire de Genève pendant l'opposition de 1880

PAR

M. Wilhelm MEYER
Astronome-adjoint.

(Extrait des *Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève*,
tome XXVII, 2me partie.)

GENÈVE
IMPRIMERIE CHARLES SCHUCHARDT
1881

Ele.11

RECHERCHES

SUR

SATURNE, SES ANNEAUX ET SES SATELLITES

D'APRÈS

Les observations faites à l'équatorial de dix pouces d'ouverture de l'Observatoire de Genève pendant l'opposition de 1880

PREMIÈRE PARTIE

Observations sur Saturne et ses anneaux.

Les séries de mesures micrométriques contenues dans ce travail sont les premières observations suivies faites avec le puissant instrument offert au canton de Genève par M. Ém. Plantamour. Leur but principal ne pouvait pas encore être d'avancer beaucoup notre connaissance du monde de Saturne, le plus étendu et le plus compliqué du système solaire, car il s'agissait d'abord de bien connaître l'instrument lui-même, de se familiariser avec son emploi et de chercher la méthode d'observation dont on pourra tirer les meilleurs résultats pour une série d'observations ultérieures. Me plaçant à ce point de vue, j'ai cru bien faire

d'entrer dans quelques détails sur les recherches suivantes dont l'influence sur le résultat final ne sera peut-être pas considérable, mais qui peuvent probablement servir à indiquer l'arrangement le plus favorable pour les observations à faire lors de la prochaine opposition de Saturne. Dans les oppositions de 1881 à 1884, les conditions astronomiques seront meilleures qu'en 1880, comme on peut le voir par le petit tableau suivant,où j'ai donné, d'après le *Nautical Almanac*, la date, le logarithme de la moindre distance de Saturne à la terre Δ, la déclinaison δ, enfin les valeurs maxima du grand axe et du petit axe a et b de l'anneau.

Date.	$lg\,\Delta$	δ	a	b
1880 Octobre..... 15	0.92028	+ 7°21′	45″,06	11″,54
1881 Octobre..... 28	0.91532	12° 3′	45,57	15,10
1882 Novembre.... 11	0.91105	16°11′	46,01	18,04
1883 Novembre.... 26	0.90781	19°29′	46,35	20,02
1884 Décembre.... 10	0.90587	21°40′	46,54	20,90

Les observations de 1880 ont été faites avec un micromètre à fils. La vis micrométrique, dont une révolution correspond à très peu près à 30″ d'arc, n'a pas encore été suffisamment étudiée pour faire connaître dans toute son étendue la valeur d'un tour avec l'exactitude désirable. Le tambour est divisé en 30 parties, et celles-ci sont assez espacées pour permettre d'estimer les vingtièmes de partie. La relation entre une partie du tambour et une seconde d'arc, adoptée dans les calculs suivants, est

$$1\,p = 0'',99672 \pm 0'',00056$$

A l'exception d'une seule soirée les mesures ont toujours été faites à peu près dans la même partie de la vis, en sorte que l'on pourra tenir compte d'une inégalité des différents tours de vis, si des recherches subséquentes la mettaient en évidence, en multipliant les résultats actuels par un facteur constant, qui sera en tous cas bien près de l'unité. D'après l'erreur moyenne de la valeur d'une partie indiquée plus haut, l'incertitude provenant de cette cause peut s'élever à 0″,025 dans les résultats des mesures relatives aux anneaux et aux satellites intérieurs à

Dione, et à 0″,11 au maximum pour Titan. L'erreur de ces résultats, provenant de l'accord imparfait entre les observations du même soir, est à peu près le double de celle due à l'incertitude sur les pas de vis, comme on le verra par la suite.

Le cercle de position permet de déterminer, au moyen d'un vernier, une direction angulaire à 5 minutes d'arc près, par un seul ajustement. Pendant toute la durée des observations, le micromètre n'a pas été enlevé de l'instrument, et la direction du parallèle sur le cercle de position a été déterminée par un assez grand nombre d'observations de passages d'étoiles. Cette direction correspond à la lecture 337°31′,0.

L'instrument suit la marche diurne des astres au moyen d'un moteur à eau, mais celui-ci laisse encore à désirer. L'ajustement sur le fil du milieu reste rarement assez constant pendant le temps nécessaire pour ajuster le fil mobile sur le point voulu, et l'on était obligé d'attendre quelquefois assez longtemps pour profiter d'un moment favorable, où le mouvement fût plus régulier. On s'occupe maintenant de corriger ce défaut, qui a sans doute augmenté considérablement l'erreur moyenne d'un ajustement, et qui rendait les observations très difficiles.

Les observations se font sur champ obscur, les fils étant éclairés; l'éclairage a toujours été excellent, et surtout très uniforme sur toute l'étendue du réticule. Les oculaires employés sont les Nos IV avec un grossissement de 350, et V grossissant 450 fois. Enfin la perfection optique de l'instrument est tout à fait satisfaisante, et j'aurai l'occasion d'en donner des preuves dans la partie de ce travail dans laquelle je m'occuperai des satellites de Saturne. Quant aux anneaux de la planète, j'en ai vu quatre à plusieurs reprises, et distinctement; ceux formés par l'intervalle de Cassini, déjà visible dans des instruments moins puissants, par l'intervalle de Encke que souvent on ne voit pas dans des lunettes de la même force que la nôtre, et enfin l'anneau obscur, découvert par Bond avec un objectif de quinze pouces. Dans trois soirées de l'automne passé, qui a été en général extraordinairement favorable aux observations, j'ai vu ce dernier anneau assez bien pour prendre les mesures micrométriques qu'on trouvera plus loin.

J'ai commencé les observations de Saturne le 9 août, mais sans utiliser les deux premières soirées; la série des observations sur la planète et son anneau, donnée dans le tableau suivant, commence le 12 août pour se terminer au 6 décembre. Chaque chiffre du tableau étant la moyenne de cinq ajustements faits dans la même soirée, celui-ci représente 1045 observations. Le nombre entier des ajustements sur lequel est basé ce travail s'élève à 2035.

TABLEAU I

	1880	t	N	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	M	Oc.	Im.
		h m	° ′	t p	t p	t p	t p	t p	t p	t p	t p	t p	t p	t p		
1	Août 12	13 0	337° 9	23 24.56	23 32.22	23 36.62	23 55.36	24 0.37	24 15.56	24 20.02	24 38.48	24 43.76	24 50.70	24 7.66	IV	2
2	» 13	13 4	—	26 50.20	26 43.00	26 37.58	26 18.32	26 14.26	25 59.08	25 53.92	25 35.76	25 30.41	25 22.80	26 6.71	IV	2
3	» 14	13 2	336 15	23 24.18	23 31.70	23 36.52	23 55.72	24 0.76	24 15.20	24 20.20	24 39.00	24 43.62	24 50.96	24 7.85	IV	2
4	» 18	13 1	336 50	23.92	31.79	36.52	55.71	0.16	15.32	19.88	39.20	43.52	51.52	7.75	—	—
5	» 24	12 29	336 45	23.66	31.70	36.56	55.66	0.68	15.68	20.97	39.63	44.23	51.80	7.73	V	2
6	» 27	13 17	336 56	23.30	31.06	36.38	55.32	0.22	15.46	19.98	39.60	44.42	52.08	8.01	IV	—
7	Sept. 20	10 50	336 38	21.84	30.56	35.42	55.34	0.16	16.32	21.16	40.44	46.28	53.50	7.92	IV	4
8	» 22	11 29	336 8	21.90	29.90	35.62	55.10	0.70	16.31	21.26	40.80	45.64	53.96	8.01	IV	3
9	» 23	12 44	336 14	21.48	30.24	35.38	55.13	0.16	15.64	20.62	40.40	45.80	53.78	7.91	IV	2
10	» 24	10 39	336 41	22.04	30.19	35.20	55.58	0.44	16.38	21.40	40.88	46.12	54.39	8.13	IV	1
11	» 25	12 21	336 11	39.11	47.11	52.44	24 12.18	17.30	32.93	38.02	57.56	25 2.56	25 10.22	25.04	V	1
12	» 29	12 42	336 0	39.18	47.24	52.76	12.62	17.04	33.68	38.80	58.64	4.02	11.86	25.18	—	—
13	Oct. 1	11 34	336 12	39.00	47.00	52.54	12.30	17.48	34.14	38.72	58.02	3.54	11.72	25.32	IV	4
14	» 8	13 25	336 10	39.04	47.34	52.83	12.82	17.58	33.62	38.62	58.90	4.26	12.02	25.41	V	3
15	» 10	11 3	336 17	38.88	47.26	52.68	12.14	17.34	34.26	39.04	59.16	3.58	12.66	25.88	IV	2
16	» 31	9 8	336 9	39.58	47.39	52.53	12.72	17.66	34.32	38.96	59.26	4.26	12.61	25.93	V	1
17	Nov. 1	10 43	335 39	39.51	47.46	52.88	13.03	17.74	34.00	39.09	58.74	4.41	12.69	26.23	V	4
18	» 10	12 53	335 41	39.96	48.22	53.00	13.28	18.36	34.50	38.82	59.20	4.22	12.28	25.92	V	3
19	Déc. 6	11 33	335 21	41.14	49.18	54.34	13.17	18.16	33.66	38.36	57.60	2.90	10.64	25.75	V	4

Ce tableau contient dans la colonne *t* l'instant moyen des observations de chaque soirée exprimé en temps moyen de Genève; dans la colonne N la moyenne des lectures du cercle de position, le fil horizontal coïncidant avec le grand axe de l'anneau. Les colonnes (1) à (10) renferment les moyennes des cinq lectures du tambour de la vis micrométrique pour les dix différents ajustements du fil mobile sur les points suivants de l'anneau et du disque de la planète et qui sont faits régulièrement chaque nuit d'observation : Pour les ajustements (1) à (5),

l'extrémité orientale de l'anneau coïncide avec le fil du milieu; (1) est la lecture du tambour, le fil mobile étant ajusté sur l'extrémité occidentale de l'anneau; (2) celle pour l'ajustement sur le bord intérieur de l'anneau sur son côté occidental, (3) celle pour le bord occidental, et (4) celle pour le bord oriental du disque de la planète; enfin (5) est l'ajustement du fil mobile sur le bord intérieur de l'anneau à son côté oriental. Pour les ajustements (6) à (10), l'extrémité occidentale de l'anneau est ajustée sur le fil du milieu : (6) est la lecture du tambour quand le fil mobile était ajusté sur le bord intérieur de l'anneau à l'ouest de la planète, (7) celle pour le disque de la planète du côté ouest et (8) du côté est; (9) celle pour le bord intérieur de l'anneau du côté est et (10) est l'ajustement du fil mobile sur l'extrémité orientale de ce dernier. La colonne M du tableau contient la lecture du fil du milieu sur le tambour de la vis micrométrique pour chaque soirée. Cette lecture est déterminée par un assez grand nombre d'ajustements du même objet des deux côtés du fil du milieu; j'ai fait, outre les observations ci-dessus, des mesures micrométriques du diamètre polaire de Saturne, et des diamètres équatorial et polaire de Jupiter. Les deux dernières colonnes du tableau indiquent l'oculaire employé et la qualité de l'image; 1 est mis pour très bonne, 2 pour bonne, 3 pour médiocre et 4 pour mauvaise. Mais dans la déduction des résultats de ces observations, j'ai fait abstraction de la différence entre la qualité de l'image pour les différentes soirées, en leur donnant le même poids, parce que dans le cas où l'image était moins nette, j'ai toujours attendu un moment favorable qui permît de faire un ajustement dont l'exactitude me parût suffisante; j'ajoute que le numéro 4 n'indique pas encore une très mauvaise image, les observations de Saturne ayant été restreintes aux soirs où les conditions atmosphériques n'étaient pas décidément défavorables. Quant au mode d'observation en général, il importe de remarquer que j'ai toujours tâché, autant que possible, d'amener sous le milieu où dans l'axe des fils les points qui étaient visés.

Le tableau suivant contient les données qui déterminent la position de

la planète pour l'instant moyen de chacune des dix-neuf soirées. La première colonne donne la déclinaison δ, la 2me et la 3me l'angle horaire θ et la distance zénithale z, les deux dernières le logarithme de la distance à la terre, lg Δ, et enfin lg $\frac{\Delta}{r}$, c'est-à-dire le rapport de cette distance à la distance moyenne de Saturne au soleil, à laquelle toutes les observations seront rapportées.

Je dois faire remarquer ici que j'ai négligé dans les calculs suivants l'influence de la réfraction de l'air sur les distances mesurées. L'erreur maximum, qui en résulte, ne dépasse pas un centième de seconde d'arc pour les observations de Saturne et de son anneau.

TABLEAU II

N°	δ	θ	z	$lg\,\Delta$	$lg\,\frac{\Delta}{r}$
		h m			
1	+ 8° 40	— 3 23	57° 12′	0.95011	9.97061
2	8 40	— 3 15	55 57	0.94936	9.96986
3	8 40	— 3 13	55 38	0.94863	9.96913
4	8 38	— 2 59	53 33	0.94569	9.96619
5	8 34	— 3 7	54 48	0.94127	9.96177
6	8 31	— 2 6	46 20	0.93941	9.95991
7	8 3	— 2 55	53 24	0.92621	9.94671
8	8 0	— 2 8	47 1	0.92539	9.94589
9	7 58	— 0 48	39 36	0.92499	9.94549
10	7 56	— 2 48	52 29	0.92465	9.94515
11	7 54	— 1 3	40 38	0.92423	9.94473
12	7 48	— 0 35	39 16	0.92299	9.94349
13	7 45	— 1 25	42 34	0.92246	9.94296
14	7 33	+ 0 56	40 29	0.92101	9.94151
15	7 30	— 1 18	42 11	0.92074	9.94124
16	6 54	— 1 44	43 47	0.92173	9.94223
17	6 53	— 0 5	39 20	0.92196	9.94246
18	6 39	+ 2 43	52 49	0.92469	9.94519
19	6 15	+ 3 10	57 05	0.93839	9.95889

TABLEAU III

1880		p	Différence.
Août..	11	+ 0°.40	— 0°.68
»	12	0.37	— 0.71
»	14	1.27	+ 0.19
»	18	0.68	— 0.40
»	24	0.77	— 0.32
»	27	0.58	— 0.52
Sept..	20	0.88	— 0.36
»	22	1.38	+ 0.14
»	23	1.28	+ 0.04
»	24	0.83	— 0.44
»	25	1.33	+ 0.06
»	29	1.52	+ 0.22
Octob.	1	1.32	0.00
»	8	1.35	— 0.01
»	10	1.23	— 0.17
»	31	1.37	— 0.21
Nov...	1	1.87	+ 0.29
»	10	1.83	+ 0.17
Déc...	6	2.17	+ 0.35
Moyenne.			— 0°.125
Erreur moy. de la moyen.			± 0°.075
Erreur d'une observation.			± 0°.32

Le tableau III renferme dans la colonne p les valeurs 337°31′,0—N,

les minutes étant converties en fractions de degré. Les observations du 11 août remplacent celles du 13 qui ont dû être supprimées; ce jour-là le réticule était tourné du mauvais côté, en sorte qu'on doit multiplier par — 1 tous les chiffres résultant des opérations arithmétiques à faire avec les ajustements du 13, contenus dans le tab. I. La quantité *p* est l'angle de position du grand axe de l'anneau, compté dans la direction ouest-nord, à partir du côté ouest du parallèle passant par le centre de la planète; la colonne suivante donne la différence entre cette valeur et celle calculée par M. Marth, à Londres, qui a publié une éphéméride pour les observations physiques de Saturne, dans les *Astronomische Nachrichten* N° 2328. La moyenne de ces différences est — 0°,125 = — 7′,5 avec une incertitude de ± 4′,5; l'erreur moyenne pour une seule soirée s'éleve à ± 19′,2. Je trouve donc l'inclinaison de l'anneau sur le cercle

TABLEAU IV

N°	A	B	C	D	E	F	G	H	I	(M)	M—(M)
	p	p	p	p	p	p	p	p	p	t p	p
1	40.25	33.12	29.01	11.50	6.81	7.38	11.55	28.80	33.74	24 7.63	+0.03
2	40.77	33.86	28.80	10.83	7.04	7.12	11.93	28.87	33.87	26 6.50	+0.21
3	40.41	33.67	29.18	11.30	6.60	6.85	11.50	29.03	33.33	24 7.57	+0.27
4	40.52	33.27	28.89	11.14	7.02	7.00	11.23	29.10	33.09	7.72	+0.03
5	40.36	32.99	28.54	11.05	6.46	7.28	12.12	29.21	33.42	7.73	0.00
6	40.48	32.74	28.84	11.57	7.10	6.79	10.91	28.80	33.20	7.69	+0.32
7	40.54	33.05	28.75	11.13	6.86	7.43	11.71	28.77	33.93	7.67	+0.25
8	40.64	33.65	28.60	11.40	6.45	7.33	11.69	28.95	33.22	7.93	+0.08
9	40.71	33.23	28.68	11.26	6.84	6.82	11.21	28.66	33.42	7.63	+0.28
10	40.69	33.44	29.02	11.06	6.78	7.26	11.70	28.86	33.48	8.21	—0.08
11	40.11	33.40	28.71	11.32	6.81	6.95	11.41	28.63	33.04	24.66	+0.38
12	40.69	33.31	28.46	11.03	7.15	7.46	11.96	29.38	34.10	25.52	—0.34
13	40.69	33.64	28.75	11.42	6.88	7.73	11.75	28.68	33.52	25.36	—0.04
14	40.63	33.34	28.47	11.00	6.84	7.17	11.55	29.27	33.95	25.53	—0.12
15	40.96	33.73	29.00	12.00	7.46	7.32	11.47	29.06	32.95	25.77	+0.11
16	40.73	33.74	29.24	11.57	7.24	7.34	11.41	29.18	33.56	26.09	—0.16
17	40.81	33.96	29.21	11.56	7.44	6.80	11.27	28.47	33.44	26.10	+0.13
18	40.69	33.23	29.02	11.14	6.66	7.56	11.37	29.33	33.76	26.12	—0.20
19	40.71	33.26	28.57	11.46	6.83	7.20	11.47	28.97	33.79	25.89	—0.14
Moyenne..	40.600	33.402	28.828	11.302	6.909	7.199	11.538	28.948	33.516		+0.053
Err. moy..	±0.047	±0.065	±0.057	±0.067	±0.067	±0.062	±0.067	±0.059	±0.076		±0.046
1 observ..	±0.201	±0.281	±0.241	±0.275	±0.276	±0.264	±0.284	±0.248	±0.323		

du parallèle passant par son centre un peu plus faible que celle qui a été donnée par Bessel, sur les recherches duquel Marth a basé ses calculs.

Dans le tableau IV on trouve les valeurs suivantes :

$$A = \frac{\Delta}{r}((10) - (1)) \qquad F = \frac{\Delta}{r}((6) - M)$$

$$B = \frac{\Delta}{r}(M - (2)) \qquad G = \frac{\Delta}{r}((7) - M)$$

$$C = \frac{\Delta}{r}(M - (3)) \qquad H = \frac{\Delta}{r}((8) - M)$$

$$D = \frac{\Delta}{r}(M - (4)) \qquad I = \frac{\Delta}{r}((9) - M)$$

$$E = \frac{\Delta}{r}(M - (5)) \qquad (M) = \frac{1}{2}((1) + (10))$$

La dernière colonne donne les différences de (M) avec M du tabl. I. (M) est la lecture du fil du milieu dérivée seulement des ajustements du fil mobile sur l'extrémité de l'anneau des deux côtés du fil du milieu; M est la lecture trouvée par la même méthode d'observation employée dans la même soirée pour différents objets. Or les différences M — (M) montrent très bien que le mode d'ajustement pour l'anneau de Saturne n'était pas le même que pour les autres parties de l'astre observé. Si l'on regarde M comme la vraie lecture du centre du fil du milieu, puisque cette valeur est dérivée du plus grand nombre disponible d'observations, j'aurais alors ajusté l'extrémité de l'anneau en général trop du côté ouest du centre du fil. Mais ces différences indiquent en même temps un changement dans le mode d'observation, un changement d'équation personnelle pour un des objets observés, et qui doit s'être produit pour moi à la fin du mois de septembre. La moyenne des différences du 12 août au 25 septembre est + 0,161 ± 0,046, mais du 29 septembre au 6 décembre, — 0,095 ± 0,056. Bien que la moyenne de ces différences + 0,053 ne dépasse presque pas l'erreur probable dont elle est affectée, ce qui rend cette moyenne même problématique, la réalité d'un changement dans la méthode d'ajustement n'en reste pas moins probable, parce que l'erreur moyenne des deux moyennes des différences M — (M) pour

les observations du 12 août au 25 septembre et du 29 septembre au 6 décembre est relativement beaucoup plus faible, et une question se pose alors : quelle série ce changement d'équation affecte-t-il le plus, ou des observations donnant la lecture M, ou de celles des extrémités de l'anneau qui ont fourni la lecture (M)? Enfin il serait important de savoir si un changement semblable s'est produit pour les ajustements (2) à (9). Mais il me semble que les observations ne fournissent pas assez d'éléments pour répondre à ces questions. Il suffit d'avoir démontré que le mode d'ajustement est très probablement différent pour chaque objet et qu'il peut également changer pour le même. Il sera donc utile de coordonner les observations pour une série ultérieure de manière qu'ils donnent la lecture du fil du milieu pour chaque objet afin de pouvoir éliminer l'erreur individuelle de chaque cas spécial.

TABLEAU V

N°	*f*	*e*	*g*	Ph	*d*	Ph
	p	p	p	p	p	
1	7.25	6.66	11.40	— 0.04	11.47	
2	7.01	6.97	11.95	— 0.04	11.36	
3	6.80	6.84	11.36	— 0.04	11.34	
4	7.13	7.22	11.43	— 0.04	11.28	
5	7.32	6.70	11.97	— 0.04	11.10	
6	7.26	7.19	11.27	— 0.03	11.92	
7	7.46	6.73	11.75	— 0.02	11.45	
8	7.16	6.93	11.86	— 0.01	11.54	
9	7.15	7.06	11.62	— 0.01	11.66	
10	7.26	7.00	11.68	— 0.01	11.45	
11	6.88	6.94	11.41	— 0.01	11.40	
12	7.42	6.87	12.10	— 0.01	11.17	
13	7.39	7.02	11.84	— 0.01	11.72	
14	7.23	6.76	11.85		11.18	
15	7.27	7.73	11.71		11.95	
16	7.16	7.20	11.45		11.56	
17	6.82	7.40	11.37		11.45	
18	7.51	6.80	11.52		11.25	— 0.01
19	7.33	6.87	11.75		11.60	— 0.03
Moyenne.	7.200	6.994	11.631		11.464	
Erreur moyenne. . . .	± 0.047	± 0.061	± 0.054		± 0.054	
Erreur d'une observat.	± 0.200	± 0.259	± 0.230		± 0.231	

Pour les observations de 1880, j'ai pensé qu'il valait mieux prendre la moyenne des deux modes d'observation employés.

Si l'on désigne par f la largeur de l'anneau de son côté Ouest, par e celle du côté Est, par g et d les distances entre le bord de la planète et l'extrémité de l'anneau des côtés Ouest et Est, et le bord correspondant de la planète, ces quantités sont données par les formules

$$f = \frac{1}{2}(A - B + F)$$

$$e = \frac{1}{2}(A + E - I)$$

$$g = \frac{1}{2}(A - C + G)$$

$$d = \frac{1}{2}(A + D - H)$$

d'après lesquelles les chiffres du tabl. V ont été obtenus.

Les colonnes Ph du tabl. V donnent la correction qui a été appliquée pour la phase de la planète dans les colonnes g et d.

Pour la moyenne de ces quatre séries, l'erreur moyenne d'une observation est $\pm$ 0,230; celle des huit séries B à I du tabl. IV est $\pm$ 0,274, soit de 0,04 seulement plus grande que la première, mais puisque chaque valeur de f, e, g et d équivaut à deux observations des séries B à I, l'erreur moyenne a été augmentée par le procédé arithmétique que je viens d'employer pour éliminer au moins en partie une erreur constante de la valeur M, que les considérations précédentes avaient supposée possible; cela accroît la probabilité de M comme meilleure lecture du fil du milieu. Mais si une telle erreur existait encore, elle aurait le même signe pour les mesures faites du même côté du centre de Saturne et elle changerait de signe pour l'autre côté. Voilà pourquoi les différences assez faibles $f-e$ et $g-d$, qui offrent un intérêt spécial pour la question de la position du globe de Saturne dans son anneau, ne sont pas prouvées en réalité d'une manière assez convaincante. Or, pour rendre plus certaine la relation entre les deux côtés de l'anneau, j'ai encore déterminé les valeurs suivantes :

$$f_1 = \frac{\Delta}{r}\,((2)-(1))$$

$$e_1 = \frac{\Delta}{r}\,((10)-(9))$$

$$g_1 = \frac{\Delta}{r}\,((3)-(1))$$

$$d_1 = \frac{\Delta}{r}\,((10)-(8))$$

Ces valeurs sont contenues dans le tableau suivant.

TABLEAU VI

N°	f_1	e_1	g_1	d_1
1	7.16	6.49	11.27	11.42
2	6.72	7.10	11.77	12.09
3	7.00	6.84	11.49	11.14
4	7.28	7.40	11.66	11.40
5	7.36	6.93	11.81	11.14
6	7.08	6.99	11.93	11.38
7	7.71	6.39	12.01	11.55
8	7.06	7.35	12.11	11.62
9	7.73	7.04	12.26	11.80
10	7.18	7.29	11.59	11.91
11	7.04	6.74	11.74	11.15
12	7.08	6.88	11.92	11.61
13	7.02	7.17	11.87	12.01
14	7.25	6.78	12.05	11.47
15	7.32	7.93	12.05	11.79
16	6.84	7.31	11.34	11.69
17	6.96	7.25	11.71	12.22
18	7.28	7.10	11.49	11.53
19	7.31	7.04	12.01	11.86
Moyenne.	7.178	7.054	11.778	11.618
Erreur moyenne . . .	± 0.058	± 0.081	± 0.062	± 0.068
Erreur d'une observat.	± 0.248	± 0.343	± 0.263	± 0.291

Les moyennes de g_1 et d_1 sont déjà corrigées pour la phase de la planète. Maintenant les différences entre les distances respectives des deux côtés de l'anneau deviennent pour les trois méthodes employées :

$F - E = +0.290$	$G - D = +0.236$
$f - e = +0.206$	$g - d = +0.167$
$f_1 - e_1 = +0.124$	$g_1 - d_1 = +0.160$

Je regarde donc comme établi par les observations consignées dans le tabl. I qu'à l'époque où elles ont été faites, *la largeur de l'anneau de Saturne a été plus forte à son côté ouest et que le centre même de la planète était plus près de l'extrémité est de l'anneau que de l'autre.*

La position excentrique du globe de Saturne avait été déjà constatée par plusieurs astronomes; par un grand nombre d'observations faites en 1851 avec le célèbre équatorial de Fraunhofer, de neuf pouces d'ouverture, Struve la trouva égale à 0″,21, mais avec le signe contraire; la distance entre le centre de la planète et l'extrémité ouest était la plus faible. Par contre, d'autres observateurs n'ont pu constater aucune excentricité. Ces faits portent nécessairement à croire que la direction du périsaturnium est sujette à un mouvement de révolution autour du centre de la planète. En effet, si l'on admet avec la plupart des mathématiciens qui se sont occupés théoriquement de ces questions, l'opinion que l'anneau est composé d'une multitude de particules indépendantes les unes des autres, ou en d'autres termes, si l'on croit que chaque point de l'anneau se meut autour de la planète comme s'il était un satellite de ce système secondaire, il est évident que la distance au périsaturnium d'un nombre considérable de ces particules se trouvant à peu près dans la même direction, doit subir la même influence des forces perturbatrices, qui produit un mouvement lent de la longitude du périsaturnium des orbites de toutes ces corpuscules, ce qui équivaut pour nous avec un mouvement de la direction de l'excentricité des anneaux. A ce point de vue, il serait donc très important pour les recherches sur la constitution de l'anneau, de pouvoir suivre les variations apparentes de cette excentricité. Mais, puisqu'il s'agit ici d'une quantité bien inférieure aux différences constantes entre deux observateurs ou deux instruments, différences qui, dans le cas de Saturne, ne peuvent pas être éliminées avec assez d'exactitude, il importe que des observations suivies soient

faites par la même personne avec le même instrument pendant un grand nombre d'années, conditions qui ne sont pas toujours faciles à réaliser.

L'erreur moyenne d'une des valeurs f_1 e_1, etc., se trouve d'après le tabl. VI égale à 0,286, donc beaucoup plus forte que celle des valeurs f e, etc., du tabl. V. Les f_1, e_1, etc., quoique non affectés de l'erreur de M, ont néanmoins une probabilité moins grande que les f, e, etc. Si l'on adopte celles-ci comme valeurs définitives, on a pour les dimensions de Saturne et de son anneau les chiffres suivants :

	p		″
Diamètre extérieur de l'anneau	40,600	ou	40.467
Diamètre intérieur de l'anneau	26,406	»	26.321
Diamètre équatorial de la planète	17,505	»	17.448
Distance entre le centre de la planète et l'extrémité occidentale de l'anneau	20,383	»	20.317
Largeur de l'anneau, ouest	7,200	»	7.177
» » est	6,994	»	6.971

Le diamètre de Saturne dans la direction polaire a été obtenu par des ajustements faits des deux côtés du fil du milieu, pour éliminer celui-ci par les observations mêmes. Dans le tabl. VII, je donne les valeurs de ce diamètre d'abord telles qu'elles résultent directement des observations des différentes soirées, et dans la colonne suivante les mêmes valeurs réduites à la distance moyenne de Saturne, enfin la dernière colonne indique le nombre d'ajustements doubles faits dans chaque soirée.

Mais ce diamètre n'est pas égal à la longueur de l'axe entre les deux pôles, parce que l'axe de rotation n'était pas perpendiculaire à la ligne de vision. Le chiffre obtenu représente le diamètre de la planète sous une certaine latitude saturni-centrique φ, et le rayon polaire se trouve par la formule

$$b = \frac{a\rho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi}}$$

dans laquelle a désigne le rayon équatorial, et ρ le rayon sous la latitude φ. Si l'on introduit dans cette formule les deux différences

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} \qquad l = \frac{a-\rho}{a}$$

et si l'on admet que la seconde puissance de ces valeurs est négligeable comme termes de second ordre, on arrive pour l'aplatissement à l'expression approchée

$$\varepsilon = \frac{l}{\sin^2 \varphi}$$

qui est suffisamment juste dans notre cas.

TABLEAU VII

DATE		L	$\frac{\Delta}{r}$ L	Nombre d'observations
Août.....	11	17°.54	16°.42	5
»	12	17.45	16.31	5
»	13	17.33	16.17	5
»	14	17.14	15.96	5
»	18	17.45	16.14	5
»	27	17.86	16.28	10
Septembre...	20	18.75	16.58	5
»	22	18.03	15.92	10
»	23	18.37	16.21	10
»	24	18.35	16.17	10
»	25	18.43	16.23	10
»	29	18.67	16.39	10
Octobre.....	8	18.77	16.40	10
»	10	18.48	16.14	10
»	31	18.68	16.35	10
Novembre...	1	18.75	16.42	10
»	10	18.68	16.46	10
Décembre...	6	18.10	16.46	10
			16.280 ± 0.042	150

Pour déterminer φ, il faut supposer que l'équateur de Saturne se trouve dans le plan de l'anneau. Si l'on appelle alors α et β le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'anneau, on a

$$\cos \varphi = -\frac{\beta}{\alpha}$$

β est pris avec le signe + si le pôle nord de Saturne est visible; à l'opposition de 1880, on voyait le pôle sud. Voici les quelques observations qui peuvent servir à déterminer la valeur de β.

TABLEAU VIII

DATE	T	$\frac{\Delta}{r}$ T
Septembre ... 22	10.96	9.68
» 23	10.67	9.41
» 24	10.79	9.51
» 25	10.87	9.57
» 29	10.97	9.63
Octobre..... 10	10.75	9.39
» 31	10.60	9.28
Octobre..... 2.5		9.496

T est la distance entre deux lignes parallèles, dont une est tangente au point le plus septentrional de l'anneau et dont l'autre passe par les points où les bords de l'anneau et de la planète se rencontrent. Soit maintenant y la distance perpendiculaire de l'un de ces points au grand axe de l'anneau, on a $T = y + \beta$; mais on cherche $\beta - y$, la correction à ajouter à la valeur observée de T, pour avoir le vrai petit axe de l'anneau. Les deux ellipses, l'anneau et le disque de Saturne, sont représentées par les formules

$$\alpha^2 \beta^2 = \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2$$
$$a^2 b^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

où x et y sont les coordonnées du point de rencontre des deux ellipses. En introduisant dans ces formules $\beta + y = 2t = \frac{\Delta}{r} T$; $\beta - y = \lambda$; $\frac{a-b}{a} = \varepsilon$, on trouve, en négligeant les termes multipliés par les secondes puissances de λ et ε :

$$\lambda = \frac{t\,(a^2 - t^2 - 2\,a^2\,\varepsilon)}{2\,\alpha^2 - a^2}$$

L'aplatissement de Saturne ε, qu'on cherche, est encore contenu dans cette formule, mais son influence sur λ est très faible. On peut admettre que $\varepsilon = \frac{1}{10}$, valeur trouvée par Bessel. Alors les valeurs $2t = 9{,}496$, $\alpha = 20{,}300$, et $a = 8{,}753$ donnent $\lambda = 0{,}251$, donc $\beta = 4{,}873$ et $\varphi = 76°6',5$. De cette valeur introduite dans la formule pour l'aplatissement, il résulte enfin $\varepsilon = 0{,}0743$ ou $\frac{1}{13{,}4}$. Il va sans dire que l'inclinaison φ est variable; elle change avec la position géocentrique de Saturne. Mais comme l'influence de cette variation pendant la durée des observations de T est à peu près égale à l'erreur moyenne d'une observation, on peut prendre la moyenne des T comme valable pour la moyenne des instants d'observation, octobre 2,5.

Pendant l'opposition de 1880, les conditions astronomiques n'étaient pas bien favorables pour mesurer le petit axe de l'anneau, car son extrémité septentrionale se projetait sur le disque de la planète, en sorte qu'il n'était pas toujours facile de déterminer le point où le petit axe coupait l'anneau, et l'autre extrémité était complètement cachée derrière Saturne. La valeur de β ne mérite donc pas la confiance qu'on peut accorder aux autres mesures, bien que l'accord entre les observations de T soit assez satisfaisant. L'angle φ compris entre la ligne de vision sur Saturne et son axe de rotation pour oct. 2,5, en supposant toujours que celui-ci coïncide avec l'axe du plan de l'anneau, est très sensiblement affecté de cette incertitude sur β. Pour avoir une idée de l'erreur constante qu'on aura probablement commise pendant les mesures de T, on peut se servir des recherches de Bessel sur la direction de cet axe, déterminée très exactement par un grand nombre d'observations de la disparition de l'anneau aux moments où la terre passait par son plan. D'après cet astronome, on trouve la longitude L et la latitude B du pôle de l'anneau par les formules :

$$L = 76° 53' 8''.9 + 46''.462\,(t - 1800)$$
$$B = 61° 49' 44''.7 + 0''.350\,(t - 1800)$$

Pour octobre 2,5, ces formules donnent $L = 77°55',6$ et $B = 61°50',1$. L'ascension droite A et la déclinaison D de ce point sont : $A = 36°20',6$ et $D = 82°57',5$. L'on peut obtenir également une valeur de ces quantités A et D, donnant la direction de l'axe perpendiculaire au plan de l'anneau, à l'aide des observations de l'angle de position p du grand axe et de l'inclinaison φ, en se servant des formules trigonométriques

$$\sin D = \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos p$$
$$\sin (\alpha - A) = - \frac{\sin \varphi}{\cos D} \sin p$$

où α et δ représentent l'ascension droite et la déclinaison géocentriques de Saturne. Dans notre cas, nous avons $\varphi = 76°6',5$; $p = + 1°12',0$; $\alpha = 25°47',0$ et $\delta = + 7°42',9$. L'angle p est donné par l'éphéméride de Marth, mentionnée plus haut, corrigée de $- 0°,125$, la différence moyenne de mes observations de cet angle avec cette éphéméride (voir tabl. III). De ces valeurs résultent $A = 36°30',2$ et $D = 83°43',5$. La différence de ces nombres avec ceux que l'on tire des recherches de Bessel n'est pas bien considérable : les deux A diffèrent de 9',6, tandis que je trouve D de 46',0 plus fort. Si l'on fait le calcul inverse, en cherchant φ par les valeurs de A et D données par Bessel, on trouve $\varphi = 75°21',9$ et $\beta = - 5'',112$, donc un chiffre qui est de 0",227 plus fort que celui résultant des mesures de T. La différence est encore acceptable, vu la position peu favorable de l'anneau pour l'observation de son petit axe.

Outre les mesures micrométriques du diamètre équatorial et polaire de Saturne, que j'ai discutées plus haut, j'en ai fait aussi pendant mes observations de ses satellites, dont nous nous occuperons dans la seconde partie de ce travail. Il suffit ici de rappeler que les distances de ces satellites au centre de la planète sont déterminées chaque fois dans deux directions perpendiculaires, dont l'une est parallèle au grand axe et l'autre au petit axe de l'anneau. Pour chaque direction, deux mesures sont faites entre les deux bords de la planète et le satellite, et la diffé-

rence donnait par conséquent la valeur du diamètre de la planète dans les deux directions.

J'ajoute que les mesures des satellites sont toujours faites avec des grossissements inférieurs à ceux qui ont été employés pour les précédentes séries d'observations. Le tabl. IX donne les moyennes respectives de chaque soirée avec leur réduction à la distance moyenne de Saturne : *a* désignant le diamètre dans la direction de l'équateur et *b* celui dans la direction perpendiculaire à la première, les deux valeurs telles qu'elles résultent directement des observations.

TABLEAU IX

DATE 1880		(*a*)	$\frac{\Delta}{r}$ (*a*)	(*b*)	$\frac{\Delta}{r}$ (*b*)	Nombre d'observations
		p	p	p	p	
Août.....	14	18.83	17.54	17.98	16.75	8
»	17	19.30	17.88	17.28	16.01	8
»	18	18.99	17.57	17.99	16.64	10
»	22	19.24	17.68	17.42	16.01	8
»	24	19.14	17.53	17.89	16.38	10
»	27	19.15	17.46	17.68	16.12	8
Septembre...	13	19.65	17.51	18.05	16.08	8
»	20	19.53	17.28	19.50	17.25	8
»	22	19.09	16.85	18.54	16.37	10
»	23	18.81	16.59	17.70	15.61	6
»	24	19.40	17.10	18.26	16.09	8
»	29	19.82	17.40	18.61	16.34	10
Octobre.....	2	19.62	17.20	18.38	16.11	10
»	8	19.15	16.74	19.32	16.89	6
»	10	20.05	17.51	18.51	16.17	10
»	16	19.96	17.42	19.12	16.68	8
»	31	20.28	17.76	19.00	16.63	8
Novembre...	1	19.46	17.05	18.59	16.28	10
»	10	19.46	17.15	18.89	16.65	10
Décembre...	5	19.43	17.65	19.20	17.44	8
»	6	18.70	17.01	17.63	16.04	10
»	11	19.65	18.02	18.02	16.52	6
Moyenne.....			17.356		16.406	188
Moyenne corrigée.			17.374		16.356	
Secondes d'arc...			17.317		16.302	
Erreur moyenne..			± 0.078		± 0.092	

Dans la seconde colonne des moyennes de ce tableau, on trouve les

valeurs moyennes du diamètre équatorial, corrigé pour la phase de la planète, et du diamètre polaire corrigé par l'effet de projection dont il était question plus haut. La troisième contient ces mêmes valeurs converties en secondes d'arc, et enfin la quatrième, leurs erreurs moyennes. L'incertitude de ces moyennes n'est pas beaucoup plus grande que celle, dont les observations précédentes sont affectées, et les résultats des deux modes d'observation s'accordent dans les limites de leurs erreurs moyennes; combinées en tenant compte de leur incertitude relative, ces valeurs deviennent $a = 17'',415$ et $b = 16'',201$, d'où l'on obtient pour l'aplatissement du globe de Saturne.

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{14.5}$$

Ce chiffre est remarquablement faible, en comparaison des résultats obtenus par d'autres astronomes, et dont je cite les suivants :

	a	b	$\frac{a-b}{a}$
Bessel :	17".053	15".381	$\frac{1}{10.2}$
Arago :	17.698	15.766	$\frac{1}{9.2}$
Lassell :	17.453	15.827	$\frac{1}{10.7}$
Struve :	17.99		
Secchi :	17.661		

L'accord entre les différents résultats obtenus par ces observateurs pour le même diamètre n'est pas très satisfaisant. La différence entre Struve et Bessel s'élève presque à une seconde d'arc. Mais cette erreur personnelle de chaque observateur s'ajoute comme constante à toutes les mesures micrométriques, en sorte que le rapport entre les valeurs des deux diamètres observés par la même personne ne diffère pas autant pour les différents observateurs, que ces diamètres eux-mêmes. Tel n'est pas le cas pour mes observations; elles donnent le diamètre équatorial de

0″,15 seulement plus faible que la moyenne des cinq résultats, mais le diamètre polaire que j'ai trouvé est le plus grand de tous. Pour obtenir un aplatissement de $\frac{1}{10}$, je devrais ajouter à peu près 0″,3 à la valeur de a donnée plus haut, et retrancher la même quantité de la valeur de b. Qu'un écart de 0″,6 existe réellement dans la manière d'ajuster le fil sur des objets aussi semblables que deux diamètres, pour le même observateur et le même instrument, cela me paraît bien peu probable. Si on ne l'admet pas, ces mesures accuseraient la possibilité d'une variabilité de l'aplatissement, dans le cas où Saturne serait enveloppé d'une très haute atmosphère qui présenterait, comme le fait celle de la Terre en plus petites proportions, des dépressions polaires, variant suivant les différentes positions que la planète occupe sur son orbite. Des observations continuées aussi longtemps que possible par la même personne, et avec le même instrument, pourraient nous donner ainsi une première notion sur la météorologie de Saturne.

TABLEAU X

DATE 1880	P	$\frac{\Delta}{r}$ P	Q	$\frac{\Delta}{r}$ Q	R	$\frac{\Delta}{r}$ R	S	$\frac{\Delta}{r}$ S	X	$\frac{\Delta}{r}$ X	Y	$\frac{\Delta}{r}$ Y
Août. 24	33.21	30.41	32.77	30.01	9.78	8.96	10.65	9.75				
Oct.. 10					9.94	8.68	11.54	10.06				
» 31	35.37	30.96	35.33	30.93	11.19	9.79	10.95	9.56	3.32	2.91	4.67	4.09
Moyennes...		30.68		30.47		9.14		9.77		2.91		4.09
Second. d'arc.		30.58		30.37		9.11		9.74		2.90		4.08

Dans le tableau suivant, j'ai désigné par

P, la distance entre le bord intérieur du côté ouest de l'anneau obscur et l'extrémité est du système des anneaux.

Q, la distance entre l'extrémité ouest du système des anneaux et le bord intérieur de l'anneau obscur du côté est.

R, la largeur des anneaux, côté ouest, y compris l'anneau obscur.

S, la même largeur, côté est.

X, la largeur de la partie de l'anneau brillant depuis le milieu de l'intervalle de Cassini jusqu'au bord extérieur du système, côté ouest.

Y, la largeur de la partie de l'anneau brillant depuis le milieu de l'intervalle de Cassini jusqu'au bord intérieur de l'anneau brillant du même côté.

Les moyennes de P et Q (pour abréger je laisse de côté le facteur $\frac{\Delta}{r}$), retranchées de 40″,47, valeur du grand axe du système des anneaux, fournissent deux nouvelles valeurs des distances R et S, trouvées par un autre mode d'observation. Les deux résultats combinés en proportion du nombre d'observations faites pour chacun des deux, donnent la largeur des anneaux jusqu'à la limite intérieure de l'anneau obscur égale à 9″,42 du côté ouest à 9″,88 du côté est; enfin si l'on retranche de ces chiffres la largeur des anneaux brillants trouvée pour chaque côté par les observations traitées plus haut, on a la largeur de l'anneau obscur du côté ouest 2″,24, et du côté est 2″,91. Quoique le nombre d'observations fournissant ces deux chiffres ne soit pas grand, leur différence, de 0″,7 environ, ne peut pas être, à mon avis du moins, due exclusivement à l'incertitude des mesures respectives. Je crois donc que la largeur de l'anneau obscur a été réellement plus faible du côté ouest que de l'autre, contrairement au résultat mieux constaté pour la largeur de l'anneau brillant, qui est moins large du côté est.

Le diamètre intérieur de l'anneau obscur est, d'après le tabl. X, égal à 21″,17, valeur s'accordant très bien avec les mesures de Secchi, pour une observation aussi délicate; Secchi trouvait 21″,419.

La distance de l'intervalle de Cassini aux bords extérieur et intérieur de l'anneau ou plutôt des anneaux brillants, n'a été mesurée que dans une seule soirée et d'un seul côté. La somme X + Y de ces distances devrait être égale à la largeur de l'anneau brillant du côté ouest, c'est-à-dire à 7″,18. En réalité, elle est de 0″,2 plus faible; le désaccord n'est donc pas bien considérable. J'ai ajouté la moitié de cette différence à X et Y pour faire concorder leur somme avec la largeur de l'anneau.

Dans le XIme et dernier tableau de la Ire partie, j'ai réuni tous les

résultats de ce travail sur Saturne et ses anneaux, rapportés à la distance moyenne de 9.5389.

TABLEAU XI

Résultats des observations sur Saturne et ses anneaux.

Diamètre extérieur du système des anneaux	40″.47
Distance entre l'extrémité ouest du système et le milieu de la séparation cassinienne	3.00
Diamètre intérieur de l'anneau brillant	26.32
Largeur de l'anneau brillant, côté ouest	7.18
Largeur de l'anneau brillant, côté est	6.97
Diamètre intérieur de l'anneau obscur	21.17
Largeur de l'anneau obscur, côté ouest	2.24
Largeur de l'anneau obscur, côté est	2.91
Espace entre l'anneau brillant et la planète, côté ouest	4.42
Espace entre l'anneau brillant et la planète, côté est	4.45
Distance entre le centre de la planète et l'extrémité occidentale de l'anneau	20.32
Diamètre équatorial de la planète	17.42
Diamètre polaire de la planète	16.20
Aplatissement	$\frac{1}{14.5}$
Ascension droite du pôle du plan des anneaux, octobre 2.5	36° 21′.1
Déclinaison du pôle du plan des anneaux, octobre 2.5	83° 38′.3

DEUXIÈME PARTIE

Observations des satellites de Saturne :

ENCELADE, TÉTHYS, DIONÉ, RHÉA ET TITAN

Saturne a huit satellites; mais trois de ces astres, Mimas, Hypérion et Japetus manquent dans les tableaux suivants; voici pourquoi.

Le premier, Mimas, satellite intérieur, est très difficile à apercevoir dans les meilleurs instruments optiques, et je ne suis pas bien sûr de

l'avoir vu; il est le plus souvent caché derrière le disque ou l'anneau de la planète, sa distance au centre de Saturne ne dépassant pas 3 rayons de ce dernier. Pour voir ce satellite, il faut qu'il soit dans une de ses élongations et qu'en même temps les conditions atmosphériques soient favorables. Je trouve pourtant à plusieurs endroits dans mon carnet d'observations la remarque : « Probablement entrevu Mimas, » et le 25 septembre, j'ai ajouté à 12 h. 45 m., temps moyen de Greenwich : « l'élongation ouest a sans doute déjà passé. » D'après l'éphéméride de ce satellite publiée par M. Marth, dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 2328, il aurait dû être à son élongation ouest à 13 h. seulement. Une autre observation faite le 13 novembre 1880 par M. Pritchett à Glasgow (Missouri) et que je lis dans le journal *English Mechanic and World of Science*, n° 823, se trouve bien d'accord avec la mienne. Cet astronome observait avec un réfracteur de 12 ¼ pouces d'ouverture; ce jour-là, à 7 h. 57 m., temps moyen local, il croyait voir ce satellite près de l'extrémité ouest de l'anneau, mais déjà à 8 h. il le perdait de vue. D'après cette observation peu sûre, le satellite aurait devancé l'éphéméride de 1 h. 5 m. à cette époque; l'observateur ajoute : « Je ne puis pas dire positivement que ce fût Mimas, bien que cette nuit ait été une des plus belles de notre climat. On voyait distinctement Encelade du côté ouest, sans occulter la planète avec une lamelle. Si ce n'était pas Mimas, je devrais en conclure qu'il est beaucoup plus difficile à voir que les satellites de Mars que j'ai souvent observés pendant les deux dernières oppositions. » Si d'un autre côté cette observation de M. Pritchett semble appuyer la mienne du 25 septembre, j'en ai fait une autre, le 11 décembre, qu'on ne pourrait pas concilier avec elles. C'était à 8 h. $47^m,3$, temps moyen de Greenwich, que j'ai vu par instants assez distinctement une très faible étoile à l'est de l'anneau. Malheureusement la turbine à l'aide de laquelle l'instrument suit la marche diurne des astres, ne fonctionnait pas, en sorte qu'il ne m'a pas été possible de faire des mesures micrométriques de sa position. Les valeurs des deux coordonnées $x = +\ 25'',4$ et $y = +\ 2'',0$, dont la signification sera expliquée plus

loin, sont estimées à l'œil et affectées par conséquent d'une incertitude de $\pm$ 1″,5 au moins. Mais je suis sûr que le point lumineux se trouvait du côté sud du grand axe, en sorte que, si c'était Mimas, il ne pouvait pas encore avoir passé son élongation Est au moment indiqué, tandis que d'après l'éphéméride, elle aurait dû avoir lieu déjà à 8 h. 2 m. Le meilleur accord entre ma position estimée et l'éphéméride s'obtient en corrigeant celle-ci de — 2 h. 13 m.; on trouve alors pour le moment donné $x = +$ 26″,8 et $y = +$ 2″,7; la différence entre l'observation et le calcul devient pour x, égale à 1″,4, et pour y, à 0″,7. Peu de temps après cette observation, les brouillards s'élevaient de plus en plus et ne permettaient pas de suivre plus longtemps l'astre douteux. Mais par suite de la communication de M. Pritchett, je suis plutôt d'avis que l'objet vu le 11 décembre était une petite étoile fixe et non pas Mimas.

Enfin une autre note, datée du 31 octobre, dit que ce jour-là j'avais longtemps cherché ce satellite dans les meilleures conditions atmosphériques, à l'époque où il devait se trouver à son élongation ouest, mais sans en voir la moindre trace. Il est vrai que Mimas est rarement observé avec des instruments de la même force optique que celle du réfracteur de Genève; Sir John Herschell n'a jamais pu le voir avec son télescope de vingt pieds de longueur focale.

Avec le même instrument, cet astronome avait beaucoup de difficulté à voir Encelade, le second satellite, dont la distance au centre de la planète est égale à 4 rayons du globe de Saturne et qui, suivant d'autres observateurs, n'est pas beaucoup plus lumineux que Mimas. Je n'avais pourtant pas la moindre peine à suivre cet astre et à faire des mesures micrométriques de sa position pendant plusieurs soirées. D'après les observations photométriques, faites de 1877 à 1878 à Cambridge (États-Unis), avec un réfracteur de quinze pouces d'ouverture, ce petit satellite n'aurait que 594 kilomètres de diamètre, tandis que Mimas en aurait 470 (Voir *Annals of the astronomical observatory of Harvard college,* vol. XI, part. II. *Photometric observations*, p. 269). De ces deux chiffres, il résulte que le rapport de l'intensité lumineuse de ces deux satellites était, à

l'époque des observations à Cambridge, à peu près celui de 2 à 3. Mais j'aurais sûrement dû voir Mimas beaucoup mieux, si cette même proportion eût encore été admissible pour l'époque de mes observations, et je suis convaincu que cette intensité est sujette à des variations considérables. Je dois citer ici une remarque du capitaine Jacob, ancien directeur de l'Observatoire de Madras, qui peut servir d'appui à l'opinion que je viens d'exprimer. Cet astronome a pu faire en 1857, sous le ciel pur des Indes, 12 mesures de l'angle de position de Mimas, avec un équatorial de 6,3 pouces d'ouverture seulement (voir *Monthly Notices*, XVIII, p. 3). Il dit à propos de ces mesures sur Mimas (*M. N.*, XVII, p. 174) : « Je l'ai trouvé accidentellement, car je n'aurais jamais cru le voir après avoir pris connaissance des expériences de Herschell au Cap de Bonne-Espérance — et après la peine que j'avais eue moi-même à trouver Encelade. La première fois même, je l'ai confondu avec Encelade, mais plus tard je n'ai plus eu de difficulté à l'apercevoir. En effet, dans quelques nuits exceptionnelles il paraissait même être le plus brillant des deux. » Par contre, dans une communication que Lassell adressait à la même époque à la Société astronomique de Londres, cet observateur, muni du puissant instrument illustré par de nombreux succès, désignait Mimas comme un satellite particulièrement difficile à voir (*Monthly Notices,* XVII, p. 67)[1]. L'opinion indiquée d'un changement dans l'éclat

[1] *Rem.* Une observation que j'ai réussi à faire dans la nuit du 4 septembre 1881, confirme de nouveau l'opinion de changements dans l'éclat lumineux de Mimas, parce que je suis sûr de l'avoir vu ce jour-là. J'ai obtenu 18 ajustements du micromètre, les fils étant éclairés et la planète non cachée derrière une lamelle. L'intervalle de temps employé pour les mesures micrométriques a été de 27 minutes et le satellite a visiblement passé par son élongation ouest pendant les mesures. La moyenne des observations donne pour 13 h. 13 m. 27 s. temps moyen de Greenwich $x = -31'',1$ et $y = 0'',0$. L'incertitude de ces coordonnées n'atteint certainement pas $0'',5$. D'après l'éphéméride de Marth, publiée dans les *Astronomische Nachrichten*, N° 2386, le satellite aurait dû passer par son élongation ouest à $13^h,6$ seulement, ce qui s'accorde par conséquent avec l'observation à moins d'une demi-heure près. Pendant mon observation Saturne était encore de plus de deux heures avant sa culminaison et la Lune n'était pas encore couchée. La distance de la planète à la terre était à peu près la même que l'année passée le 27 août, donc plus grande que pour le plus grand nombre des observations contenues dans ce travail, et cependant je n'avais jamais réussi à apercevoir distinctement ce satellite. Il est vrai que la nuit du 4 septembre 1881 était une des plus belles, quant à la diaphanité de l'atmosphère; je voyais Encelade plus distinctement que jamais. Il ne disparaissait pas par

de lumière est partagée par plusieurs astronomes en ce qui concerne les autres satellites de Saturne. Pour Japetus, le satellite extérieur, c'est un fait déjà constaté par W. Herschell, qu'il disparaît presque complètement à son élongation Est. — Deux notes que je trouve dans mon carnet, relatives à un phénomène de changement d'éclat observé sur Téthys, peuvent être citées ici. La première est du 23 septembre : « Je ne puis pas trouver Téthys aujourd'hui, tandis que Dioné (ordinairement moins brillant que Téthys), est très facile à voir. » Le lendemain j'écrivais : « Il est singulier que Téthys soit aussi distinctement visible dans sa conjonction nord, tout près du pôle de la planète, tandis qu'on pouvait à peine hier apercevoir le satellite lorsqu'il était déjà bien au-delà de sa conjonction sud. »

Quant à mes observations d'Encelade, je les ai commencées le 14 août, Saturne étant alors bien loin de son opposition qui avait lieu le 19 octobre, la distance de la planète à la terre dépassant encore la distance la plus faible pour l'opposition de 1880 de plus de la moitié du rayon de l'orbite terrestre. Dans les tableaux suivants, on trouvera les résultats des mesures micrométriques des positions apparentes de ce satellite relativement au centre de la planète, faites en neuf soirées jusqu'au 6 décembre. Le nombre des jours d'observation pour Téthys [1], Dioné et Rhéa est 22, pour Titan, 21.

moments, comme cela arrive souvent, quoiqu'il fût déjà passablement éloigné de son élongation ouest pendant la dernière série de mesures micrométriques que j'ai faites. Cette nuit-là j'ai donc observé pour la première fois tous les satellites du système de Saturne, sauf Hypérion, que je n'ai pas cherché.

La difficulté de voir Mimas paraît avoir été générale pendant l'opposition de 1880. Il n'a été encore publié à la date actuelle, 6 septembre 1881, aucune observation certaine faite en Amérique ; les seules observations de ce satellite faites en Europe en 1880, et publiées jusqu'à présent, sont trois conjonctions avec le bord de l'anneau observées à Toulouse, septembre 28 et 29 et novembre 25 (*Comptes rendus* du 9 mai 1881, p. 1099).

[1] Rem. Quant à l'orthographe du nom de ce satellite, les autorités ne sont pas d'accord. Les astronomes français l'écrivent Thétis (voir l'Annuaire du Bureau des Longitudes) comme la petite planète n° 17 et c'est ainsi que je l'ai écrit aussi dans une note préliminaire, contenant quelques résultats du présent travail et publiée dans les *Astronomische Nachrichten*, N° 2375. Mais quoiqu'une confusion entre ce satellite et la petite planète dans une citation ne soit pas à craindre (le nom de Dioné aussi a trouvé un pareil double emploi comme planète n° 106, j'ai préféré adopter l'orthographe de Sir John Herschell, qui a donné à tous les satellites de Saturne leurs noms actuels, et j'écris désormais Téthys.

Le septième satellite, Hypérion, découvert simultanément par Lassell et Bond en septembre 1848, est le plus faible de tous. Ayant très peu de chance de le voir avec l'équatorial de Genève et ne connaissant pas sa position relative au centre de Saturne pour un moment donné, je n'ai pas voulu perdre mon temps à le chercher. Japetus enfin s'éloigne trop de Saturne pour qu'on puisse faire des mesures micrométriques suivies de ce satellite. Il m'eût fallu employer un autre mode d'observation dont je n'ai pas fait usage pour cette opposition.

Il me reste à donner quelques explications sur les tableaux qui suivent. Dans la première colonne se trouve la date, dans la seconde l'instant de l'observation. Celui-ci est exprimé en temps moyen de Greenwich, obtenu en retranchant $24^m\ 37^s$ de l'heure de Genève. J'ai donné la préférence à l'heure de Greenwich parce que les éphémérides des quatre satellites Encelade, Téthys, Dioné et Rhéa, calculées par M. Marth à Londres, ont pour base le méridien passant par cet observatoire. La colonne suivante donne un angle l—L, qui fixe la position du satellite sur son orbite. Si l'on appelle a et b les deux demi-axes de l'ellipse qu'il

TABLEAU XII

Encelade.

DATE 1880	INSTANT	l — L	x	O — C Δx	y	O — C Δy	Oc.
	h m s	°	″	″	″	″	
Août.. 14	13 51 21	82.92	+ 36.20	— 0.46	+ 2.39	+ 1.17	I
Sept.. 22	10 4 29	210.30	— 19.38	+ 0.28	— 6.87	+ 1.79	III
» 25	9 40 53	274.50	— 36.83	+ 2.23	0.00	— 0.78	III[1]
» 29	11 52 35	269.73	— 40.26	— 1.09	— 0.67	— 0.21	—
Oct... 8	12 45 42	124.70	+ 33.48	+ 1.11	— 4.79	+ 0.80	—
» 10	8 50 9	247.35	— 37.44	— 1.08	— 3.24	+ 0.53	II
Nov... 1	10 20 40	285.54	— 38.29	— 0.45	+ 4.61	+ 2.11	II
» 10	11 41 15	145.39	+ 22.28	+ 0.10	— 6.26	+ 1.23	III
Déc... 6	9 58 20	118.51	+ 32.50	— 0.73	— 2.42	+ 1.65	II

[1] Pour cette observation y est seulement estimé à l'œil.

paraît décrire autour du centre de Saturne vu de la terre, l'angle l—L donnerait sa position dans une orbite circulaire de rayon a, le point de départ de cet angle étant la position que le satellite occupe dans cette orbite apparente au moment de son opposition avec la terre, vue du centre

TABLEAU XIII

Téthys.

DATE 1880	INSTANT	l — L	x	O — C Δx	y	O — C Δy	Oc.
	h m s	°	″	″	″	″	
Août.. 13	13 42 12	119.30	+ 39.88	— 0.07	— 6.60	— 0.59	—
» 14	11 48 56	294.98	— 41.60	— 0.14	+ 5.56	+ 0.36	III
» 17	13 12 0	158.23	+ 16.45	— 0.60	—12.41	— 0.94	III
» 18	11 23 0	334.47	— 20.41	— 0.57	+11.01	— 0.13	III
» 22	14 10 43	39.66	+ 29.08	— 0.51	+ 8.34	— 1.21	—
» 24	10 49 42	34.50	+ 26.30	— 0.03	+ 9.98	— 0.26	III
» 27	10 54 51	247.40	— 43.47	— 0.34	— 3.95	+ 0.83	III
Sept.. 13	11 12 48	252.50	— 44.96	+ 0.61	— 2.11	+ 1.64	III
» 20	9 36 11	135.06	+ 33.68	— 0.32	— 8.05	+ 0.75	III
» 22	10 10 48	162.16	+ 15.29	+ 0.51	—11.87	— 0.06	III
» 24	11 49 21	195.80	— 12.02	+ 1.14	—11.03	+ 0.89	III
» 29	9 13 11	49.00	+ 34.91	— 1.67	+ 6.34	— 1.74	III
Octob. 2	10 26 19	270.97	— 49.15	— 0.57	+ 0.63	+ 0.42	III
» 8	13 48 0	2.36	+ 2.23	+ 0.22	+12.35	+ 0.21	III
» 10	8 59 6	345.65	— 12.49	— 0.40	+11.54	— 0.19	III
» 16	8 59 53	50.37	+ 37.76	+ 0.16	+ 6.30	— 1.43	III
» 31	9 47 0	37.93	+ 30.39	+ 0.48	+ 7.98	— 1.14	III
Nov... 1	10 28 19	234.43	— 39.78	— 0.23	— 4.75	+ 1.96	III
» 10	11 46 54	161.67	+ 15.40	+ 0.28	—10.75	— 0.05	III
Déc... 5	9 50 10	234.63	— 37.94	+ 0.30	— 3.81	+ 2.31	III
» 6	10 6 24	67.50	+ 43.49	+ 0.24	+ 2.34	— 1.70	III
» 11	8 3 54	284.83	— 44.85	+ 0.07	+ 3.29	+ 0.61	III
1881							
Janv.. 11	7 20 33	70.10	+ 41.25	— 0.15	+ 2.72	— 0.70	III

de Saturne. Or, si l'on suppose un système de coordonnées rectangulaires et planes, dont le centre coïncide avec celui de la planète et la ligne des abscisses avec le grand axe de l'anneau apparent de Saturne, si enfin l'on désigne par x et y les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'orbite apparente définie ci-dessus, on obtient les deux relations :

$$x = a \sin (l - L)$$
$$y = b \cos (l - L)$$

Les quantités a, b et l—L sont données pour les cinq satellites intérieurs dans l'éphéméride de M. Marth, pour les oppositions de 1880 à

TABLEAU XIV

Dioné.

DATE 1880	INSTANT	l — L	x	O — C Δx	y	O — C Δy	Oc.
	h m s	°	″	″	″	″	
Août.. 13	13 44 48	57.60	+ 48.11	— 1.26	+ 8.75	+ 0.70	—
» 14	12 6 8	180.47	+ 0.29	+ 0.80	—14.70	+ 1.05	III
» 17	13 3 32	220.42	— 38.27	— 0.10	—11.85	+ 0.19	III
» 18	11 32 10	343.65	— 15.49	+ 1.11	+15.17	— 0.02	III
» 22	14 2 47	163.66	+ 17.44	+ 0.75	—15.49	— 0.24	—
» 24	10 56 53	49.80	+ 46.19	+ 0.71	+ 9.83	— 0.44	III
» 27	10 39 37	82.94	+ 59.02	— 0.36	+ 1.82	— 0.14	III
Sept.. 13	11 34 44	164.81	+ 16.58	+ 0.55	—14.90	+ 0.52	III
» 20	9 26 31	354.40	— 4.90	+ 1.12	+16.02	+ 0.18	III
» 22	10 17 9	262.21	— 61.04	+ 0.17	— 1.73	+ 0.42	III
» 23	11 8 33	38.52	+ 38.08	— 0.43	+11.75	— 0.67	III
» 24	11 55 2	174.36	+ 6.10	+ 0.02	—14.82	+ 0.96	III
» 29	9 23 32	98.56	+ 61.00	— 0.41	— 2.73	— 0.38	III
Octob. 2	10 34 26	139.85	+ 40.29	+ 0.17	—12.05	— 0.03	III
» 8	13 54 44	227.82	— 46.29	— 0.04	—10.83	— 0.38	III
» 10	9 4 37	253.72	— 59.07	+ 0.88	— 4.13	+ 0.19	III[1]
» 16	9 5 24	174.26	+ 6.52	+ 0.27	—14.54	+ 0.70	III
» 31	9 41 11	351.65	— 8.96	+ 0.09	+15.06	+ 0.40	III
Nov... 1	10 39 27	128.58	+ 49.18	+ 0.56	— 8.61	+ 0.63	III
» 10	11 56 52	240.05	— 53.38	+ 0.25	— 6.63	+ 0.57	III
Déc... 5	9 44 1	277.34	— 59.98	— 0.41	+ 2.96	+ 1.23	III
» 6	10 24 21	52.60	+ 47.45	— 0.19	+ 8.02	— 0.20	III
1881							
Janv.. 11	7 25 3	91.09	+ 56.86	+ 0.36	— 0.50	— 0.26	III

[1] Pour cette observation j'ai corrigé de deux unités le chiffre original des tours entiers de la vis. Si la lecture originale était juste, le micromètre aurait été mal tourné pour cette observation, et le tambour de la vis se serait tourné à gauche, au lieu d'être à droite, comme pour les autres mesures faites dans la même soirée. D'après cette dernière supposition, x serait égal à — 60″.54 et Δx = — 0″.59.

1881. Les valeurs x et y qui se trouvent dans les tableaux suivants sont les résultats immédiats d'observations micrométriques; elles sont exprimées en secondes d'arc et accompagnées des différences Δx et Δy de ces valeurs avec l'éphéméride. Ces deux dernières colonnes manquent pour Titan, faute d'une éphéméride de ce satellite, dont la théorie est cependant très bien connue, surtout par les recherches de Bessel. Enfin, la dernière colonne des tableaux indique l'oculaire employé pour l'observa-

TABLEAU XV

Rhéa.

DATE 1880	INSTANT	l — L	x	O — C Δx	y	O — C Δy	Oc.
	h m s	°	″	″	″	″	
Août.. 13	13 47 2	110.50	+ 76.39	— 0.10	— 6.60	— 1.09	III
» 14	11 58 54	184.64	— 5.45	+ 1.16	—21.08	+ 0.85	III
» 17	13 20 51	68.14	+ 76.87	+ 0.44	+ 6.58	— 1.64	III
» 18	11 9 39	140.61	+ 52.45	+ 0.18	—16.90	+ 0.18	III
» 22	12 30 32	104.01	+ 80.69	+ 0.26	— 4.05	+ 1.32	III
» 24	11 3 35	258.63	— 81.25	+ 0.19	— 4.63	— 0.14	III
» 27	10 46 56	136.88	+ 57.46	+ 0.34	—15.79	+ 0.46	III
Sept.. 13	11 46 38	55.68	+ 71.82	+ 1.22	+14.23	+ 1.68	III
» 20	9 15 34	245.56	— 77.76	+ 0.62	— 7.75	+ 1.44	III
» 22	10 23 31	48.85	+ 64.60	— 0.38	+14.42	— 0.18	III
» 23	11 16 45	131.55	+ 64.84	+ 0.20	—14.94	— 0.24	III
» 24	12 3 49	213.92	— 47.83	+ 0.40	—17.31	+ 1.07	III
» 29	9 32 41	244.34	— 77.85	+ 0.35	— 9.51	+ 0.02	III
Octob. 2	11 22 38	129.71	+ 67.30	+ 0.45	—13.28	+ 0.75	III
» 10	9 10 16	40.49	+ 56.09	— 0.54	+16.56	+ 0.10	III
» 16	9 10 7	159.08	+ 32.01	+ 0.74	—19.65	+ 0.34	III
» 31	9 53 54	277.96	— 85.90	+ 0.29	+ 3.32	+ 0.46	III
Nov... 1	10 33 23	359.91	+ 0.34	+ 0.47	+20.26	— 0.37	III
» 10	11 51 38	2.05	+ 3.13	+ 0.04	+19.54	— 0.61	III
Déc... 5	9 55 49	189.04	— 12.67	+ 0.50	—17.86	+ 0.85	III
» 6	10 33 59	270.86	— 83.58	+ 0.16	+ 0.97	+ 0.68	III
» 11	7 59 36	300.77	— 71.50	— 0.07	+10.00	+ 0.43	III
1881							
Janv.. 11	7 36 6	249.65	— 72.17	+ 1.63	— 4.39	+ 1.86	III[1]

[1] Cette observation a été faite sous des conditions atmosphériques des plus défavorables.

tion. Le grossissement de l'oculaire I est de 96, celui de II, 144, et celui de III, 250 fois.

Chaque valeur de x et de y est la moyenne de quatre ajustements du micromètre, les mesures étant toujours faites entre le satellite et les deux bords de la planète. Pour convertir en secondes d'arc les distances données par l'observation en parties de la vis micrométrique, j'ai pris le nombre déjà mentionné dans la première partie. L'erreur maximum,

TABLEAU XVI

Titan.

DATE 1880		INSTANT	x	y	Oc.
		h m s			
Août.....	14	11 41 57	— 164".21	+ 24".25	III
»	17	13 27 44	+ 24.74	+ 48.34	III
»	18	11 15 16	+ 89.18	+ 44.81	III
»	22	12 36 48	+ 178.02	— 20.03	III
»	24	11 10 21	+ 75.05	— 46.39	III
»	27	11 1 1	— 137.84	— 33.58	III
Septembre.	13	11 55 47	— 184.60	— 14.70	III
»	20	9 44 29	+ 160.03	+ 32.42	III
»	22	10 30 11	+ 205.42	— 6.89	III
»	23	11 24 18	+ 183.01	— 23.73	III
»	24	12 11 47	+ 131.70	— 40.86	III
»	29	9 40 57	— 187.81	— 11.08	III
Octobre...	2	11 29 32	— 110.77	+ 40.30	III
»	10	9 15 15	+ 133.55	— 38.01	III
»	16	9 13 24	— 194.93	+ 8.01	III
»	31	10 0 17	— 193.49	— 4.70	III
Novembre.	1	10 45 51	— 191.18	+ 17.28	III
»	10	12 2 27	+ 169.29	— 28.21	III
Décembre.	5	9 35 57	— 85.94	+ 38.33	III
»	6	10 49 57	— 8.33	+ 43.81	III
»	11	7 55 26	+ 192.87	— 11.36	III
1881					
Janvier....	11	7 31 27	+ 186.72	— 1.05	III

résultant de l'incertitude sur la valeur angulaire d'une partie, peut s'élever pour Titan à 0",11, mais à 0",05 seulement pour les autres satellites.

L'erreur d'un seul ajustement du micromètre, déduite des écarts entre les observations consécutives de la même distance, est de $\pm$ 0″,6, et l'erreur moyenne de chaque moyenne de 4 ajustements, c'est-à-dire l'incertitude des valeurs de x et de y données ci-dessous s'élève à 0″,3 et 0″,4.

Les orbites auxquelles sont comparées les observations des quatre satellites Encelade, Téthys, Dioné et Rhéa, sont des cercles dont le plan coïncide avec celui de l'anneau; en voici les éléments, d'après une communication personnelle de M. Marth. Les mouvements diurnes sidéraux sont pour

Encelade.....	262°.73186
Tethys.....	190.69812
Dione.....	131.53503
Rhea.....	79.69012

Les longitudes moyennes adoptées pour l'instant où la lumière arrive à la distance de la planète, dont le logarithme est 0,950, sont :

			Encelade.	*Tethys.*	*Dione.*	*Rhea.*
1880 Août.....	12	Midi à Greenwich	153°.482	207°.356	238°.717	13°.012
» Octobre....	11	»	77.395	129.245	210.820	114.421
» Décembre..	10	»	1.308	51.134	182.924	215.830
1881 Février.....	8	»	285.222	333.023	155.028	317.239

Enfin les longitudes du nœud, et les inclinaisons sur le plan de l'équateur pour les quatre satellites :

1880 Août.....	12	N = 126°.358	log sin I = 9.08731
» Octobre.....	11	126.363	9.08728
» Décembre...	10	126.373	9.08725
1881 Février.....	8	126.380	9.08720

Ces derniers chiffres diffèrent légèrement de ceux qu'on tire des éléments de Bessel pour la position de l'anneau.

TROISIÈME PARTIE

Recherches sur les mouvements de cinq satellites de Saturne.

L'étude du mouvement des satellites de Saturne a été singulièrement négligée jusqu'ici. Sur huit, il n'y en a guère qu'un, le plus grand, Titan, dont l'orbite ait été déterminée d'une manière assez exacte, par Bessel en 1830. Le célèbre astronome de Kœnigsberg avait fait avec le fameux héliomètre de Fraunhofer un nombre considérable de mesures micrométriques des positions de Titan et il en déduisit une théorie du mouvement de ce satellite. Il construisit alors des Tables de Titan, qui embrassent le siècle actuel et dans lesquelles il a tenu compte des variations des éléments, telles qu'il pouvait les déduire des anciennes observations de cet astre faites dans les deux siècles précédents par Huyghens, Cassini père, Halley, Köhler, Herschell, etc..... La comparaison de mes observations avec celles de Bessel montre que la théorie développée dans le travail classique cité est encore actuellement à très peu de chose près d'accord avec la réalité, après plus de 1144 révolutions accomplies par le satellite pendant une période de 50 ans.

Les orbites des autres satellites ne sont qu'approximativement connues par les travaux de Lamont, ancien directeur de l'observatoire près de Munich, des deux Herschell, Bær et Mædler, Bond et Jacob. Ce dernier astronome, ancien directeur de l'observatoire de Madras, avait déterminé par ses observations en 1857 les orbites elliptiques de Téthys. Dione, Rhea, Titan et Japetus. Mais ces calculs ne peuvent plus nous donner une idée des particularités dont pourrait être affecté le mouvement actuel de ces satellites, car on sait que les perturbations à longues périodes jouent un grand rôle dans les mouvements de tous les satellites,

et que l'évaluation de ces variations des éléments n'est pas encore possible dans le cas des satellites de Saturne, sauf pour Titan, le premier découvert.

Depuis Jacob, on ne peut guère citer que M. Asaph Hall, directeur de l'observatoire de Washington, connu par sa découverte des satellites de Mars, qui fasse actuellement des recherches suivies sur le système saturnien, et M. Marth, ancien adjoint de Lassell, qui construit des éphémérides de ces astres sur la base des orbites circulaires citées plus haut.

Le fait, que la théorie du système saturnien est encore si peu développée aujourd'hui, s'explique d'une manière naturelle par le faible éclat de la plupart des satellites qui ne permet que difficilement de prendre de bonnes mesures micrométriques de leurs positions. Trois d'entre eux, Mimas, Encelade et Hypérion, sont absolument invisibles pour des instruments de force moyenne, et les autres, à l'exception de Titan, demandent au moins un instrument puissant pour les voir distinctement à côté des fils brillants du micromètre. La plupart des astronomes pouvant disposer d'instruments assez puissants s'occupent des mesures des étoiles doubles, champ si vaste et si intéressant qu'il absorbe presque tout leur temps, ou bien encore de cette foule de petites planètes, branche qui commence à empiéter sensiblement sur les autres.

Il est cependant incontestable que l'étude du monde de Saturne est non seulement très intéressante, mais encore d'une grande importance par le fait qu'il est comme une reproduction en petit du système solaire, dans laquelle nous voyons les mouvements plus directement, bien qu'ils soient considérablement réduits par la grande distance qui nous sépare de cette planète. Il est certain que la comparaison des orbites des satellites de Saturne pourrait servir un jour à constater si la loi képlérienne de la relation entre les distances et les durées des révolutions est juste, sans qu'il y ait lieu d'introduire une correction due à des causes encore inconnues. Et ce sont les satellites qui seuls peuvent nous fournir des données indépendantes des deux quantités, parce que nous n'arriverons

jamais à déterminer d'une manière purement géométrique les distances des planètes, avec une exactitude assez grande.

Lors de l'installation du puissant équatorial de 10 pouces d'ouverture à notre observatoire, j'ai fait mon possible pour combler la lacune dont j'ai parlé plus haut. J'ai observé, autant que je l'ai pu, les positions apparentes des satellites par rapport au centre de la planète et dans toutes les parties de leurs orbites. Ces observations sont comparées dans le chapitre précédent avec des orbites circulaires situées dans le plan des anneaux. Les différences de mes mesures micrométriques avec ces orbites ne sont pas très grandes et prouvent en tout cas que les suppositions faites ne s'éloignent pas beaucoup de la vérité. Les observations d'Encelade laissent cependant soupçonner une excentricité sensible de son orbite, et pour Téthys une inclinaison différente de celle des anneaux était facile à reconnaître.

Je me décidai donc à déterminer plus exactement les orbites de ces astres, en prenant pour base de mon calcul l'ensemble des observations que j'en avais faites. Il s'agissait alors de choisir pour cela la méthode la plus pratique pour arriver au but. Les méthodes connues se divisent en deux genres différents : l'une d'elles cherche à réduire le problème à la détermination de l'orbite d'une étoile double, en éliminant dans une première approximation l'influence du changement de position du plan de projection sur lequel nous apercevons les mouvements des satellites, effet qui provient du mouvement de la planète autour du soleil et de notre propre changement de position avec la terre. Cette méthode ne permet d'introduire dans le calcul qu'un nombre restreint d'observations, et il faut, en faisant varier les éléments, chercher dans des approximations consécutives le système final d'éléments qui représentent le mieux les observations. Ce procédé de tâtonnements n'est guère pratique dans le cas présent. Une autre méthode, celle que Bessel a employée pour les recherches citées plus haut, consiste à calculer les éléments, au moyen de coefficients différentiels, d'après la comparaison des observations avec une première orbite approximative; ces coefficients doivent être déter-

minés numériquement pour chaque observation qui fournit deux équations linéaires, chacune contenant six inconnues. On peut alors trouver par la méthode des moindres carrés les valeurs les plus probables de ces inconnues à l'aide d'un nombre quelconque d'équations, à partir de six. Cette méthode est évidemment la plus exacte, mais elle est très laborieuse, et elle est plutôt destinée à donner une orbite définitive basée sur un grand nombre d'observations. Comme une telle base n'était pas à ma disposition pour les quatre satellites observés outre Titan, et que je ne pouvais, avec une vingtaine d'observations, arriver à déterminer avec la dernière précision une orbite de satellite, j'ai dû renoncer à suivre cette méthode, malgré son exactitude. J'ai été alors forcé de prendre un autre chemin par lequel, il est vrai, on n'arrive qu'à une approximation, mais qui s'écarte moins de la vérité que les observations des positions, sur lesquelles le calcul est basé, ne diffèrent des positions vraies. Cette méthode permet de dégager les inconnues sans faire de tâtonnements, et offre en même temps ceci d'intéressant que l'excentricité de l'orbite s'obtient d'une manière purement géométrique, sans que l'on ait à introduire dans les équations fondamentales la loi des aires égales dans des temps égaux. Or, le mouvement réel et non uniforme du satellite autour du centre de gravité du système secondaire, donne pour cette valeur un moyen de contrôle indépendant. J'aurai à revenir sur ce point dans le courant de mon exposé.

La méthode n'est point nouvelle, car je n'avais qu'à suivre, pour obtenir les formules, la méthode graphique, très souvent employée pour chercher une première approximation de l'orbite d'une étoile double. Mais avant de pouvoir utiliser ce procédé, il faut trouver un moyen de rendre les positions données indépendantes du changement du plan de projection sur lequel les observations ont été faites, et enfin les réduire à une distance moyenne de Saturne à la terre. Il est évident que la première de ces deux causes de variations apparentes des dimensions de l'orbite exige, pour être éliminée rigoureusement, la connaissance de la position de l'orbite, position qui nous est encore inconnue. Mais, heureu-

sement, l'influence que ce changement du plan de projection fait subir aux variations est assez faible lorsqu'il s'agit d'une série de mesures faites quelques mois avant et après une opposition de la planète, pour qu'une valeur approchée de ce changement, telle qu'on peut la déduire de celui sur le plan des anneaux puisse suffire.

La position apparente de celui-ci sur le plan de projection est donnée pour un certain nombre de jours de chaque année dans le *Berliner Jahrbuch*, savoir l'angle p compris entre la direction du grand axe de l'anneau et le cercle de déclinaison passant par le centre de Saturne, compté depuis le côté ouest de l'axe par le nord, puis l'angle de l'élévation de la terre au-dessus du plan de l'anneau, l. Or p est la direction de la ligne des nœuds, et $90° - l$ l'inclinaison du plan de l'anneau par rapport au plan de projection, sur lequel nous voyons la planète à un moment donné.

Soient maintenant :

(x) et (y) les coordonnées rectilignes d'un satellite, données directement par l'observation; l'origine du système étant dans le centre de Saturne et l'axe des X coïncidant avec la position apparente du grand axe de l'anneau;

ρ et P les coordonnées polaires du même point, l'origine restant la même, l'axe des X coïncidant avec la direction du cercle de déclinaison passant par le centre de la planète, compté dans le sens indiqué plus haut;

l_0 un angle moyen d'élévation de la terre au-dessus du plan de l'anneau, pour un moment suffisamment rapproché de l'opposition de la planète.

Δ_0 une distance moyenne de la planète à la terre, correspondant à une époque arbitraire;

Δ la distance de la planète au moment de l'observation.

Alors on a d'abord

$$(x) = \rho \cos (P - p)$$
$$(y) = \rho \sin (P - p)$$

Dans ce système, les (x) ne varient pas par un changement de l'incli-

naison du plan, il n'y a qu'à les réduire au rayon visuel moyen de Saturne. Mais les (y) varient en outre en raison des cosinus de l'inclinaison. On peut donc admettre avec un degré suffisant d'approximation que les coordonnées corrigées, c'est-à-dire réduites au plan moyen de projection sont représentées par les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\rho\,\Delta}{\Delta_0}\cos(\mathrm{P}-p) \\ y &= \frac{\rho\,\Delta}{\Delta_0}\frac{\sin l_0}{\sin l}\sin(\mathrm{P}-p) \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

où l'axe des X coïncide évidemment avec l'angle de position du grand axe de l'anneau sur ce plan de projection. Nous appellerons cet angle p_0.

Comme la projection d'une ellipse sur un plan est toujours aussi une ellipse, chaque observation d'un satellite, corrigée de la manière indiquée, est représentée par la formule

$$a^2b^2 = a^2\left((y-y_0)\cos\psi-(x-x_0)\sin\psi\right)^2 + b^2\left((x-x_0)\cos\psi+(y-y_0)\sin\psi\right)^2 \quad \text{(II)}$$

où

a et b représentent les deux demi-axes de l'ellipse apparente que le satellite décrit sur le plan de projection;

x_0 et y_0 les coordonnées du centre de cette ellipse;

ψ l'angle compris entre l'axe des X et le grand axe de l'ellipse.

Il s'agirait de déterminer ces cinq inconnues par un système d'équations pareilles à (II); mais la solution exacte de ce problème est impossible dans notre cas, et il faut se borner à former une expression approximative, plus facile à employer, ce qui peut se faire de la manière suivante. D'abord on connaît toujours des valeurs assez approchées du grand et du petit demi-axe de l'orbite apparente a_0, et b_0, pour pouvoir se permettre de n'introduire comme inconnues dans l'expression écrite plus haut que les corrections da et db, dont les secondes puissances sont négligeables. De plus, on sait que l'angle ψ doit être toujours très petit, parce que les inclinaisons des plans des satellites sur le plan de l'anneau sont faibles.

On peut donc faire cos ψ égal à l'unité, et négliger les termes renfermant le carré de sin ψ. Enfin, les quantités x_0 et y_0 doivent aussi être très petites, parce que la distance entre l'origine des coordonnées située au centre de la planète et le centre de l'orbite apparente représente la projection de l'excentricité de l'orbite vraie, dont le foyer se trouve au centre de la planète. Comme les observations peuvent être représentées à de faibles différences près par des orbites circulaires, l'excentricité, et à plus forte raison les quantités x_0 et y_0 peuvent être considérées comme valeurs de second ordre dont les secondes puissances sont négligeables. En ayant égard à ces considérations dans le développement de la formule (II), elle se transforme, après l'avoir divisée par $2a_0^2$, dans la suivante :

$$da\left(\frac{y^2}{a_0} - \frac{b_0^2}{a_0}\right) + db\left(\frac{b_0x^2}{a_0^2} - b_0\right) - x_0x\,\frac{b_0^2}{a_0^2} - y_0y - xy\left(1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}\right)\sin\psi +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(y^2 + x^2\,\frac{b_0^2}{a_0^2} - b_0^2\right) = o \quad \text{(III)}$$

En introduisant les notations

$$a' = \frac{y^2}{a_0} - \frac{b_0^2}{a_0};\ b' = \frac{b_0x^2}{a_0^2} - b_0;\ c' = -x\,\frac{b_0^2}{a_0^2};\ d' = -y;\ e' = -xy\left(1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}\right);$$
$$n = \frac{1}{2}\left(y^2 + x^2\,\frac{b_0^2}{a_0^2} - b_0^2\right) \quad \text{(IV)}$$

on obtient l'équation linéaire à cinq inconnues

$$a'da + b'db + c'x_0 + d'y_0 + e'\sin\psi + n = o \quad \text{(V)}$$

qui peut servir à déterminer les valeurs les plus probables de ces inconnues par la méthode des moindres carrés, dès que le nombre des observations est supérieur à cinq.

Ces cinq quantités nous font connaître la position et les dimensions de l'ellipse de projection, après quoi le problème, de chercher l'ellipse vraie, dans laquelle le mouvement du satellite a lieu autour de son centre de gravitation, devient très facile. Nous portons dans ce but l'origine des

coordonnées au centre de l'ellipse de projection, qui est en même temps le centre de l'ellipse vraie, la direction de l'axe des X étant toujours parallèle à l'équateur. Le rayon qui joint cette nouvelle origine avec l'ancienne, le centre de Saturne, étant considéré comme le foyer de l'ellipse vraie, indique évidemment la direction de la projection du grand axe de l'orbite vraie, sur laquelle se trouve le Périsaturnium et l'angle de position G de cette direction sera donné par :

$$\operatorname{tang}(G - p_0) = \frac{-y_0}{-x_0} \quad \text{(VI)}$$

Le rayon α de l'ellipse apparente dans la direction G est la projection du demi-grand axe de l'ellipse vraie. Nous le trouvons à l'aide de l'expression :

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{\sin^2(G - p_0 - \psi) + \frac{b^2}{a^2}\cos^2(G - p_0 - \psi)} \quad \text{(VII)}$$

Une tangente au point où α coupe l'ellipse apparente est parallèle au petit axe de l'ellipse vraie. Si nous appelons son angle de position H, et sa valeur projetée β, nous avons :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(H - p_0 - \psi) &= -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotang}(G - p_0 - \psi) \\ \beta^2 &= \frac{b^2}{\sin^2(H - p_0 - \psi) + \frac{b^2}{a^2}\cos^2(H - p_0 - \psi)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$

Si l'on appelle e l'excentricité de l'orbite vraie, on a évidemment :

$$e^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{\alpha^2} \quad \text{(IX)}$$

Soient maintenant :

a_1 et b_1 les demi-axes de l'ellipse vraie,

π l'ascension droite du Périsaturnium dans l'orbite vraie,

Ω l'ascension droite du nœud sur l'équateur dans l'orbite vraie,

i l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'équateur,

N_0 l'angle de position du nœud sur le plan moyen de projection,

I_0 l'inclinaison de l'orbite sur le plan moyen de projection,

α_0 et δ_0 l'ascension droite et la déclinaison de Saturne à l'instant pour lequel on a choisi le plan moyen de projection.

Comptons maintenant les angles dans l'orbite vraie dans la direction des longitudes croissantes, donc opposée à celle que nous avions choisie pour les angles sur le plan de projection; introduisons enfin un angle $F_0 = \alpha_0 - \pi - 90°$. Comme la droite N_0 sur le plan de projection est nécessairement perpendiculaire sur le rayon de vision de Saturne, qui occupe la direction α_0, N_0 doit avoir dans l'orbite vraie la position $\alpha_0 - 90°$. L'angle F_0 représente donc la direction du Périsaturnium dans l'orbite, comptée dans le sens des angles de position depuis la ligne des nœuds sur le plan de projection, et la projection de l'angle F_0 est égale à $G - N_0$. Cette remarque nous permet de poser immédiatement les quatre équations :

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos F_0 &= \alpha \cos (G - N_0) \\ a_1 \sin F_0 \cos I_0 &= \alpha \sin (G - N_0) \\ -b_1 \sin F_0 &= \beta \cos (H - N_0) \\ b_1 \cos F_0 \cos I_0 &= \beta \sin (H - N_0) \end{aligned}\right\} \quad \text{(X)}$$

auxquelles se joint encore la relation connue

$$\frac{b_1^2}{a_1^2} = 1 - e^2 \quad \text{(XI)}$$

Divisons dans les équations (X) la seconde par la première et la quatrième par la troisième, puis multiplions les deux quotients, et nous avons la nouvelle relation

$$\cos^2 I_0 = - \operatorname{tang} (G - N_0) \operatorname{tang} (H - N_0) \quad \text{(XII)}$$

Si l'on divise maintenant la deuxième et la quatrième des équations (X) par $\cos I_0$, si l'on élève ensuite toutes les quatre à la seconde puissance

et qu'on ajoute la première à la deuxième, et la troisième à la quatrième, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \alpha^2 \left(\cos^2(G - N_0) + \sin^2(G - N_0) \sec^2 I_0\right) \\ b_1^2 &= \beta^2 \left(\cos^2(H - N_0) + \sin^2(H - N_0) \sec^2 I_0\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, et en introduisant dans le quotient pour sec ^{2}I sa valeur résultant de (XII), et pour $\frac{a_1^2}{b_1^2}$ celle donnée par (XI), on trouve, après une transformation facile, la relation :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1 - e^2) = -\frac{\sin 2(H - N_0)}{\sin 2(G - N_0)} \quad \text{(XIV)}$$

Si l'on désigne, pour abréger, par c la valeur connue du premier membre de cette dernière équation, on obtient l'angle de position de la ligne des nœuds sur le plan de projection, par la formule

$$\operatorname{tang} 2 N_0 = \frac{c \sin 2 G + \sin 2 H}{c \cos 2 G + \cos 2 H} \quad \text{(XV)}$$

Cet angle étant connu, on trouve l'inclinaison par l'équation (XII) et enfin F_0 et a_1 par les équations (X), ainsi, par exemple :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} F_0 &= \operatorname{tang}(G - N_0) \sec I_0 \\ a_1 &= \alpha \cos(G - N_0) \sec F_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVI)}$$

L'angle F_0 donne directement l'ascension droite, ou la longitude du Périsaturnium dans l'orbite. On a $\pi = \alpha_0 - F_0 - 90°$, et l'on trouve enfin l'ascension droite A et la déclinaison D du pôle du plan de l'orbite par les formules :

$$\left.\begin{aligned} \sin D &= \sin \delta_0 \cos I_0 + \cos \delta_0 \sin I_0 \cos N_0 \\ \sin(\alpha_0 - A) &= -\frac{\sin I_0}{\cos D} \sin N_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVII)}$$

Alors la longitude du nœud sur le plan de l'équateur devient $\Omega = A + 90°$, et l'inclinaison de l'orbite sur ce dernier $i = 90° - D$.

Les dimensions de l'orbite vraie et sa position par rapport à un plan fixe dans l'espace étant connues maintenant, il ne nous reste plus qu'à déterminer la longitude moyenne du satellite dans l'orbite, pour un instant donné, et son mouvement moyen diurne. Pour résoudre ce problème, il faut d'abord chercher les positions vraies du satellite dans son orbite, correspondant aux positions apparentes observées, ce qui peut se faire de la manière suivante. Si α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison de Saturne pour un instant donné t, pour lequel la ligne des nœuds et l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan de projection, sont déterminées par les notations N et I, on a :

$$\left.\begin{aligned} \cos I &= \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A) \\ \sin N &= -\frac{\cos D}{\sin I} \sin(\alpha - A) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVIII)}$$

Ces deux angles ne varient pas beaucoup pendant une assez longue série d'observations, et l'on peut calculer une éphéméride, de laquelle les valeurs pour un instant donné peuvent être interpolées.

En déterminant maintenant l'angle F par la relation

$$\operatorname{tang} F = \operatorname{tang}(P - N) \sec I \quad \text{(XIX)}$$

on a l'anomalie vraie $v = \alpha - \pi - F - 90°$.

Et enfin l'anomalie excentrique E, et l'anomalie moyenne M, par les relations connues :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \\ M &= E - e \sin E \end{aligned}\right\} \quad \text{(XX)}$$

langle M augmentant proportionnellement au temps. Si M_0 est une valeur approchée de l'anomalie moyenne pour un instant moyen t_0, et dM la correction à apporter à cette valeur moyenne, si de même μ_0 est une

valeur approchée du mouvement moyen diurne et $d\mu$ sa correction, chaque observation faite à un instant t fournit une équation de la forme :

$$\left.\begin{array}{c} M = M_0 + dM + (\mu_0 + d\mu)(t - t_0) \\ \text{ou} \quad (t - t_0)\, d\mu + dM + M_0 - M + \mu_0 (t - t_0) = o \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(XXI)}$$

Cette dernière équation peut servir à déterminer les valeurs les plus probables des corrections dM et $d\mu$ en faisant concourir toutes les observations par la méthode des moindres carrés. Il va sans dire que les instants t doivent être préalablement corrigés pour l'équation de la lumière; si t_1 est l'instant donné directement par l'observation, on a l'instant corrigé

$$t = t_1 + 497^s.78\,(\Delta_0 - \Delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXII)}$$

et l'anomalie moyenne corrigée $M_0 + dM$ est alors celle que le satellite occupe en apparence, au moment où la lumière arrive à la Terre dans la distance moyenne Δ_0.

Si l'on veut déduire des éléments la position du satellite à un instant donné, pour la comparer à la position observée on peut suivre une marche inverse de celle indiquée plus haut. Les formules (XX) jusqu'à (XVIII) donnent l'angle de position du satellite pour l'instant t. Enfin on a le rayon dans l'orbite vraie

$$r = a_1 (1 - e \cos E) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXIII)}$$

et la distance apparente, vue de la terre,

$$\rho = \frac{\Delta_0 r}{\Delta} \cos F \sec (P - N) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXIV)}$$

Quant aux résultats numériques que j'ai déduits d'après cette méthode des observations données dans le chapitre précédent de ce travail, je les regarde seulement comme une base provisoire pour des recherches plus exactes, qu'une prochaine opposition de la planète permettra sans doute d'exécuter, grâce à l'expérience acquise pendant la première série d'observations faites avec notre nouvel instrument. C'est pour cette raison que je n'ai pas jugé nécessaire de donner ici tous les détails des calculs

numériques, qui auraient augmenté inutilement les dimensions de ce travail préliminaire. Voici maintenant les résultats obtenus pour l'orbité des différents salellites :

Encelade.

J'ai introduit dans le calcul huit observations de cet astre, en laissant de côté seulement l'une des positions données dans le chapitre précédent, celle du 25 septembre. Ce jour, la valeur o de la coordonnée y a été seulement estimée et non mesurée, et x aussi diffère trop considérablement de la position donnée par l'éphéméride de M. Marth, pour lui accorder quelque confiance. Des autres observations, j'ai déduit les cinq inconnues de l'équation (V) comme suit :

$$\begin{aligned} a &= 35''006 \\ b &= 7''286 \\ x_0 &= +\ 0''9189 \\ y_0 &= -\ 0''4499 \\ \phi &= -\ 0°26'.7 \end{aligned}$$

Avec ces chiffres, et les suivants qui se rapportent à la position du plan de projection pour l'époque moyenne du 8 octobre, que j'avais choisie

$$\begin{aligned} p_0 &= +\ 1°\,24'.3 \\ \Delta_0 &= 9.53890 \\ \alpha_0 &= 25°\,8'.7 \\ \delta_0 &= +\ 7°\,27'.7 \end{aligned}$$

on obtient le système suivant d'éléments :

$$\begin{aligned} a_1 &= 35''069 \\ e &= 0.066235 \\ \pi &= 181°\,45'.3 \\ N_0 &= 0°\,58'.8 \\ L_0 &= 78°\ 0'.3 \\ \Omega &= 127°\ 5'.9 \\ i &= 4°\,38'.0 \end{aligned}$$

Enfin, les équations de condition qui déterminent une anomalie moyenne et le mouvement moyen diurne du satellite donnent $M = 325°,116 \pm 2°,55$ pour $t =$ Oct. 8,5387, méridien de Greenwich,

et $\mu = 262°,7904 \pm 0°,0775$. De ce dernier chiffre résulte la durée de la révolution égale à 1 jour, 8 heures, 52 minutes et 40,5 secondes. L'incertitude de ces dernières valeurs est assez considérable, l'erreur moyenne d'une longitude dans l'orbite s'élevant à 7° environ. Mais, vu la difficulté de faire des mesures micrométriques bien exactes de ce satellite, et l'impossibilité de l'observer, lorsqu'il n'est pas près de son élongation, on pouvait s'attendre d'avance à ces discordances. L'orbite déterminée par ces quelques observations ne peut certainement pas inspirer beaucoup de confiance, surtout en ce qui concerne la longitude moyenne et le mouvement moyen, déterminé par un intervalle de 114 jours seulement. Je répète ici que je n'ai entrepris ce travail que pour obtenir une première base pour des recherches ultérieures.

J'ai représenté les observations avec le système d'éléments donné plus haut. Mais les différences du calcul avec ces dernières démontraient que le grand axe adopté était trop grand. Comme cette dernière quantité est, selon le mode de calcul employé, une valeur indépendante des autres éléments, il était permis de la faire varier isolément, de façon à obtenir par des approximations successives le meilleur accord possible entre les valeurs calculées et les valeurs observées de x. Pour chercher cette correction du grand axe, j'ai exclu la première observation, dont l'écart avec le calcul dépassait deux secondes, et j'ai déduit des autres la valeur corrigée du demi-grand axe égale à 34″,29. Avec ces données, les observations sont représentées comme suit, les lettres O et C désignant les valeurs observées et calculées des coordonnées, et dx et dy leurs différences :

t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
	″	″	″	″	″	″
227ᵈ.5811	(−36.20)	−34.07	(−2.13)	−2.39	−2.77	+0.38
266.4261	+19.38	+20.05	−0.67	+6.87	+6.72	+0.15
273.5016	+40.26	+40.05	+0.21	+0.67	−0.70	+1.37
282.5387	−33.48	−33.12	−0.36	+4.79	+3.78	+1.01
284.3751	+37.44	+37.39	+0.05	+3.24	+2.29	+0.95
306.4378	+38.29	+38.38	−0.09	−4.61	−3.04	−1.57
315.4935	−22.28	−22.02	−0.26	+6.26	+5.86	+0.40
341.4205	−32.50	−32.66	+0.16	+2.42	+2.52	−0.10

Dans la colonne t du tableau qui précède, se trouve l'instant de l'observation corrigé pour l'équation de la lumière, et compté depuis le commencement de l'année. D'après la somme des carrés des dx et dy, l'erreur moyenne d'une observation, toujours à l'exception de la première, devient $\pm$ 0″,664. On voit d'après ce tableau que les observations des y ont beaucoup moins bien réussi que celles des x, et le même fait se manifeste aussi pour les autres satellites. Il est la conséquence d'un arrangement défavorable des observations; j'ai mesuré, comme je l'ai déjà expliqué dans le chapitre précédent, les quantités x et y par rapport à un système de coordonnées rectangulaires, dont les axes coïncident avec les axes de l'ellipse apparente des anneaux de la planète. L'ajustement du micromètre pour avoir cette coïncidence a dû être fait deux fois pour chaque satellite, parce que le micromètre n'a qu'un seul fil mobile, de sorte qu'il fallait, après les mesures des x, tourner le cercle de position d'un angle droit pour faire les mesures des y. Il y a donc à tenir compte, en outre de l'erreur de l'ajustement du fil mobile, de l'erreur de l'ajustement du cercle de position, qui devait quelquefois se faire très vite pour ne pas avoir un trop long intervalle entre les mesures des deux coordonnées. De plus l'erreur de l'ajustement du cercle de position influe seulement d'une très faible quantité sur les x, tandis que les y subissent toute l'influence de cette incertitude. Il sera facile, dans une série ultérieure d'observations du même genre, de remédier à cet inconvénient, en ajustant le cercle de position toujours sur un même angle dans les deux positions du micromètre, par exemple dans la direction moyenne du grand axe de l'anneau pour l'opposition considérée. De cette façon, on aura une réduction de plus à faire pour préparer les observations en vue du calcul de l'orbite, mais l'exactitude y gagnera certainement.

J'ajoute encore ici que j'ai calculé pour le satellite Encelade la somme des carrés des écarts entre l'observation et la théorie, en employant d'abord pour le calcul des cinq inconnues, l'expression approchée (V) puis la formule exacte (II). Dans le premier cas, cette somme est 31,76,

dans l'autre 32,48. Or, ce cas spécial prouve pratiquement que la formule (V) se rapproche suffisamment de la vérité.

Téthys.

Toutes les 23 observations de ce satellite ont pu être employées pour la détermination de son orbite. Le système des équations de condition (V) a été résolu deux fois, parce que la première hypothèse pour les axes de l'ellipse de projection s'écartait trop de la réalité. Dans la seconde hypothèse, j'ai admis $a_0 = 41'',8$ et $b_0 = 10'',2$. Alors les équations finales ont donné les cinq inconnues comme suit :

$$\begin{aligned} a &= 41''287 \\ b &= 10''133 \\ x_0 &= -\ 0''00013 \\ y_0 &= -\ 0''06939 \\ \psi &= -\ 1^\circ\ 26'\ 0'' \end{aligned}$$

Les chiffres qui déterminent le plan moyen de projection, pour l'époque du 20 octobre à minuit moyen de Greenwich, et qui indiquent la direction des axes des coordonnées pour l'instant adopté dans la résolution de la formule (V), sont :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 24^\circ\ 28'\ 0'' \\ \delta_0 &= +\ 7^\circ\ 12'\ 2'' \\ p_0 &= +\ 1^\circ\ 29'\ 24'' \end{aligned}$$

La distance moyenne Δ_0 de Saturne à la Terre est la même que celle adoptée dans les chapitres précédents. On obtient alors les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 41''291 \\ e &= 0.006847 \\ \pi &= 204^\circ\ 6'\ 45'' \\ N_0 &= 359^\circ\ 56'\ 10'' \\ L_0 &= 75^\circ\ 47'\ 34'' \\ \Omega &= 113^\circ\ 57'\ 33'' \\ i &= 7^\circ\ 0'\ 40'' \end{aligned}$$

Les équations de condition (XXI) donnent pour le 27 octobre, midi

moyen de Greenwich, $M = 95°,924 \pm 0°,662$ et $\mu = 190°,7185 \pm 0°,0140$, donc la durée de la révolution est égale à 1 jour, 21 heures, 18 minutes et 8,4 secondes. Après avoir comparé une première fois les observations avec les positions déduites de ce système d'éléments, on obtient pour la valeur définitive du grand axe de l'orbite, 42″,48, comme étant celle qui établit le meilleur accord entre les observations et le calcul. La comparaison des positions observées et des positions calculées est donnée dans le tableau suivant :

t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
226.5747	—39″.88	—40″.21	+0″.33	+ 6″.60	+ 6″.73	—0″.13
227.4961	+41.60	+41.54	+0.06	— 5.56	— 6.23	+0.67
230.5542	—16.45	—17.95	+1.50	+12.41	+11.75	+0.66
231.4785	+20.41	+20.29	+0.12	—11.01	—11.64	+0.63
235.5953	—29.08	—28.78	—0.30	— 8.34	— 9.08	+0.74
237.4559	—26.30	—24.76	—1.56	— 9.98	— 9.98	0 00
240.4597	+43.47	+42.88	+0.59	+ 3.95	+ 3.69	+0.26
257.4731	+44.96	+45.53	—0.57	+ 2.11	+ 2.46	—0.35
264.4064	—33.68	—34.04	+0.36	+ 8.05	+ 9.55	—1.50
266.4306	—15.29	—15.78	+0.49	+11.87	+12.06	—0.19
268.4991	+12.02	+13.07	—1.05	+11.03	+11.53	—0.50
273.3909	—34.91	—36.38	+1.47	— 6.34	— 7.30	+0.96
276.4417	+49.15	+48.46	+0.69	— 0.63	— 1.63	+1.00
282.5819	— 2.23	— 2.04	—0.19	—12.35	—12.23	—0.12
284.3813	+12.49	+11.94	+0.55	—11.54	—12.20	+0.66
290.3818	—37.76	—37.35	—0.41	— 6.30	— 6.86	+0.56
305.4144	—30.39	—29.84	—0.55	— 7.98	— 8.53	+0.55
306.4431	+39.78	+39.84	—0.06	+ 4.75	+ 5.57	—0.82
315.4977	—15.40	—14.71	—0.69	+10.75	+11.17	—0.42
340.4148	+37.94	+38.82	—0.88	+ 3.81	+ 4.94	—1.13
341.4261	—43.49	—43.39	—0.10	— 2.34	— 2.94	+0.60
346.3406	+44.85	+44.45	+0.40	— 3.29	— 4.19	+0.90
377.3079	—41.25	—41.69	+0.44	— 2.72	— 2.21	—0.51

D'après les valeurs de dx et de dy, l'erreur moyenne d'une observation de ce satellite devient $\pm$ 0,705.

Dioné.

La seule observation exclue du calcul est celle du 10 octobre, qui était

déjà désignée comme douteuse dans le chapitre précédent. Avec l'hypothèse de $a_0 = 54'',7$ et $b_0 = 13'',4$, les autres observations donnent

$$\begin{aligned} a &= 54''679 \\ b &= 13''034 \\ x_0 &= +\ 0''37727 \\ y_0 &= -\ 0''20289 \\ \psi &= -\ 0°\ 19'\ 10'' \end{aligned}$$

Ces quantités se rapportent au même plan moyen de projection que celui adopté pour Téthys. Les éléments elliptiques de l'orbite de Dioné deviennent alors :

$$\begin{aligned} a_1 &= 54''685 \\ e &= 0.016888 \\ \pi &= 180°\ 16'\ 48'' \\ N_0 &= 1°\ 10'\ 20'' \\ L_0 &= 76°\ 12'\ 41'' \\ \Omega &= 124°\ 17'\ 2'' \\ i &= 6°\ 41'\ 30'' \end{aligned}$$

Le mouvement moyen diurne de ce satellite résulte de mes observations, par la méthode décrite plus haut, égal à 131°,54551 ± 0°,00907 et l'anomalie moyenne pour le 27 octobre, à midi moyen de Greenwich, 334°,992 ± 0°,434.

Pour ce satellite, les observations des x laissent des écarts trop considérables avec la théorie, pour qu'il soit possible de les attribuer à des erreurs accidentelles. L'erreur moyenne d'une observation de la coordonnée x deviendrait égale à ± 1'',028, tandis que l'erreur d'un y serait seulement égale à ± 0,494. Il paraît que ce désaccord est en partie causé par le fait, que le centre de gravité du système saturnien ne doit pas complètement coïncider avec le centre de la planète, c'est-à-dire que le mouvement des satellites autour de Saturne n'a certainement pas lieu exactement comme nous l'avons supposé dans les considérations théoriques qui précèdent. L'excentricité de l'orbite, déterminée d'une manière purement géométrique, n'indique pas encore exactement la forme de l'ellipse que le satellite décrit en réalité autour du centre de gravité du système

secondaire. Si la distance du foyer de l'ellipse vraie au centre de Saturne est plus faible que celle déduite de l'excentricité de l'orbite, obtenue d'après la méthode expliquée, le mouvement du satellite serait plus uniforme, et l'on pourrait considérer l'orbite comme un cercle excentrique par rapport à la planète, si cette distance est à peu près la même que l'excentricité trouvée par la formule (V). Or, pour rechercher si une pareille position excentrique du centre de gravité était en réalité perceptible dans les observations de ce satellite, j'ai résolu encore une fois le système des équations (XXI), mais en introduisant à la place des M les v, résultant directement de la formule (XIX), c'est-à-dire en remplaçant les anomalies moyennes par les anomalies vraies. J'ai trouvé, en effet, dans cette supposition une diminution de l'erreur moyenne pour les deux quantités déterminées par les équations (XXI), la longitude du satellite pour un instant donné et le mouvement diurne. J'obtiens $M = 334°,807 \pm 0°,359$ et $\mu = 131°,54350 \pm 0°,00750$; enfin, la durée de la révolution est égale à 2 jours, 17 heures, 40 minutes, 54,1 secondes avec une incertitude de 15,3 secondes. De même aussi, l'accord du calcul avec les observations directes des x et y devient meilleur; l'erreur moyenne des x est $\pm 0'',875$, et celle des y $\pm 0'',440$, mais la première de ces valeurs diminue encore sensiblement, si l'on ne tient pas compte des observations des x du 18 août et du 20 septembre. Pendant ces deux observations, le satellite se trouvait près de sa conjonction sud avec la planète. Dans cette position, les x calculés sont sensiblement affectés de l'incertitude de la longitude moyenne, qui s'élève pour ce satellite à $21',5$, et il est fort probable que cette cause d'erreur s'est combinée pour les deux observations indiquées avec des erreurs accidentelles.

Pour une série d'observations à faire pendant l'opposition de 1881-1882, il serait désirable de mesurer avec le plus grand soin les x pendant les conjonctions, afin de pouvoir se borner à ces dernières dans le calcul de la longitude moyenne, et du mouvement diurne fait d'après le système des équations de condition (XXI). Les observations traitées dans ce travail ne me paraissent pas permettre ce choix-là.

Les observations de Dioné sont représentées comme suit, si l'on suppose le mouvement uniforme ayant lieu sur la périphérie d'un cercle excentrique par rapport à la planète, et en admettant $a_1 = 54'',58$, la valeur du demi-grand axe qui s'accorde le mieux avec les mesures directes :

t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
226.5765	— 48.″11	— 49.″25	+ 1.″14	— 8.″75	— 8.″06	— 0.″69
227.5082	— 0.29	— 0.02	— 0.27	+ 14.70	+ 15.24	— 0.54
230.5483	+ 38.27	+ 37.80	+ 0.47	+ 11.85	+ 11.33	+ 0.52
231.4849	+ 15.49	+ 17.43	(— 1.94)	— 15.17	— 15.20	+ 0.03
235.5901	— 17.44	— 16.90	— 0.54	+ 15.49	+ 14.77	+ 0.72
237.4609	— 46.19	— 45.40	— 0.79	— 9.83	— 10.00	+ 0.17
240.4491	— 59.02	— 59.04	+ 0.02	— 1.82	— 1.76	— 0.06
257.4884	— 16.58	— 16.02	— 0.56	+ 14.90	+ 14.91	— 0.01
264.3997	+ 4.90	+ 6.59	(— 1.69)	— 16.02	— 15.78	— 0.24
266.4350	+ 61.04	+ 61.57	— 0.53	+ 1.73	+ 1.89	— 0.16
267.4707	— 38.08	— 38.61	+ 0.53	— 11.75	— 12.11	+ 0.36
268.5031	— 6.10	— 6.28	+ 0.18	+ 14.82	+ 15.25	— 0.43
273.3980	— 61.00	— 60.96	— 0.04	+ 2.73	+ 2.56	+ 0.17
276.4474	— 40.29	— 39.73	— 0.56	+ 12.05	+ 11.81	+ 0.24
282.5866	+ 46.29	+ 45.96	+ 0.33	+ 10.83	+ 9.97	+ 0.86
290.3857	— 6.52	— 7.39	+ 0.87	+ 14.54	+ 14.51	+ 0.03
305.4104	+ 8.96	+ 9.15	— 0.19	— 15.06	— 14.66	— 0.40
306.4509	— 49.18	— 47.90	— 1.28	+ 8.61	+ 9.20	— 0.59
315.5032	+ 53.38	+ 54.80	— 1.42	+ 6.63	+ 6.81	— 0.18
340.4106	+ 59.98	+ 60.08	— 0.10	— 2.96	— 2.17	— 0.79
341.4386	— 47.45	— 48.12	+ 0.67	— 8.02	— 7.80	— 0.22
377.3111	— 56.86	— 56.01	— 0.85	+ 0.50	+ 0.69	— 0.19

L'erreur moyenne d'une observation devient $\pm$ 0″,574, en laissant de côté les deux différences mises en parenthèse dans le tableau précédent.

Rhéa.

21 observations ont été employées pour la détermination de l'orbite de ce satellite. J'ai seulement exclu du calcul la première, du 13 août. L'hypothèse $a_0 = 76'',2$ et $b_0 = 18'',5$ fait ressortir l'ellipse de projection déterminée par les chiffres suivants :

$$a = 76''489$$
$$b = 18''032$$
$$x_0 = -\ 0''64260$$
$$y_0 = -\ 0''21649$$
$$\psi = -\ 0°\ 0'\ 30''.1$$

le plan moyen de projection étant le même que celui choisi pour Téthys et Dioné. Il en résulte l'orbite suivante :

$$a_1 = 76''495$$
$$e = 0.014657$$
$$\pi = 239°\ 26'\ 0''$$
$$N_0 = 1°\ 28'\ 48''$$
$$I_0 = 76°\ 21'\ 52''$$
$$\Omega = 127°\ 4'\ 31''$$
$$i = 6°\ 36'\ 10''$$

Pour l'instant du midi moyen à Greenwich, du 27 octobre, on obtient $= 70°,281 \pm 0°,492$: puis μ $79°,6873 \pm 0°,0111$; enfin, pour la durée de la révolution 4 jours, 12 heures, 25 minutes et 25,4 secondes. La valeur définitive du demi grand axe est 75″,97. Dans cette orbite, les observations sont représentées comme suit :

t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
	″	″	″	″	″	″
227.5031	+ 5.45	+ 6.05	— 0.60	+ 21.08	+ 21.02	+ 0.06
230.5603	— 76.87	— 76.80	— 0.07	— 6.58	— 6.65	+ 0.07
231.4692	— 52.45	— 53.01	+ 0.56	+ 16.90	+ 16.26	+ 0.64
235.5260	— 80.69	— 80.97	+ 0.28	+ 4.05	+ 4.84	— 0.79
237.4655	+ 81.25	+ 81.03	+ 0.22	+ 4.63	+ 3.58	+ 1.05
240.4542	— 57.46	— 57.96	+ 0.50	+ 15.79	+ 15.42	+ 0.37
257.4966	— 71.82	— 71.27	— 0.55	— 14.23	— 12.39	— 1.84
264.3922	+ 77.76	+ 78.14	— 0.38	+ 7.75	+ 8.32	— 0.57
266.4394	— 64.60	— 64.19	— 0.41	— 14.42	— 14.02	— 0.40
267.4764	— 64.84	— 65.61	+ 0.77	+ 14.94	+ 13.84	+ 1.10
268.5091	+ 47.83	+ 47.91	— 0.08	+ 17.31	+ 17.45	— 0.14
273.4044	+ 77.85	+ 77.84	+ 0.01	+ 9.51	+ 8.74	+ 0.77
276.4808	— 67.30	— 67.94	+ 0.64	+ 13.28	+ 13.07	+ 0.21
284.3890	— 56.09	— 56.76	+ 0.67	— 16.56	— 16.30	— 0.26
290.3888	— 32.01	— 32.47	+ 0.46	+ 19.65	+ 19.15	+ 0.60
305.4192	+ 85.90	+ 85.01	+ 0.89	— 3.32	— 2.68	— 0.64

t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
	"	"	"	"	"	"
306.4466	— 0.34	— 2.22	(+ 1.88)	— 20.26	— 20.19	— 0.07
315.5010	— 3.13	— 6.04	(+ 2.91)	— 19.54	— 19.71	+ 0.17
340.4188	+ 12.67	+ 11.99	+ 0.68	+ 17.86	+ 17.62	+ 0.24
341.4460	+ 83.58	+ 82.77	+ 0.81	— 0.97	— 0.76	— 0.21
346.3377	+ 71.50	+ 69.82	+ 1.68	— 10.00	— 9.69	— 0.31

Les deux fortes différences mises en parenthèse dans le tableau précédent s'expliquent par la même raison que celle qui était déjà invoquée en pareil cas pour Dioné, le satellite se trouvant aussi dans sa conjonction sud avec la planète. A ces exceptions près, l'erreur moyenne d'une observation de Rhéa est égale à $\pm$ 0",651.

Titan.

Quant à ce satellite, le plus brillant du système de Saturne et qui s'éloigne jusqu'à 3′ du centre, un grand nombre d'observations ont été faites depuis sa découverte par Huygens en 1655. La théorie de son mouvement est rigoureusement traitée par Bessel (*Astr. Nachr.*, n° 9 et suite). Les quelques observations que j'en ai données dans le chapitre précédent, exécutées d'après une méthode dont l'erreur augmente fortement avec les distances, ne peuvent presque rien ajouter à la connaissance du mouvement de cet astre. Les calculs suivants ont pour seul but de déterminer, d'après mes observations, la distance moyenne du satellite et une longitude moyenne, soit une correction du mouvement moyen depuis l'époque de Bessel, pour en déduire la masse de la planète.

D'après les tables de Bessel, on a pour l'époque moyenne de mes observations :

$$\pi = 269^\circ\ 0'\ 43''$$
$$\Omega = 122^\circ\ 55'\ 3''$$
$$i = 6^\circ\ 34'\ 52$$
$$e = 0.028717$$

et une longitude moyenne pour le commencement de l'année 1880, méri-

dien de Paris, $L_0 = 248°57'43''$, cette dernière considérée au moment du départ de la lumière de la planète. Mais un calcul superficiel avait déjà montré que cette dernière devant être sensiblement augmentée, et je l'ai provisoirement corrigée de $+ 1°45'$. En outre, j'ai déterminé les différences entre les anomalies vraies d'après mes observations et celles données par l'orbite de Bessel. En supposant maintenant que l'inclinaison et la longitude du nœud de l'orbite de Bessel ne donnent pas lieu à une correction, j'ai essayé de déterminer d'après l'ensemble de mes observations une correction de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du Périsaturnium. Le procédé, que j'ai adopté pour obtenir ces corrections, est en principe le même que celui proposé par M. Oppolzer dans le second volume de son ouvrage : *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, p. 388 et suite. Cet astronome introduit les valeurs auxiliaires :

$$\Phi = \frac{\sin\varphi}{\text{arc}\sin 1''}\sin\pi$$

$$\Psi = \frac{\sin\varphi}{\text{arc}\sin 1''}\cos\pi$$

où φ est l'angle de l'excentricité, ($e = \sin\varphi$). L'équation différentielle entre les variations des éléments indiqués, et celles de la longitude vraie du satellite dans son orbite, devient alors :

$$d(v+\pi) = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, d L_0 - \left\{\cos(v+\pi)\frac{2+e\cos v}{\cos^2\varphi} + \frac{\Psi\,\text{arc}\,1''}{\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)\right\} d\Phi$$
$$+ \left\{\sin(v+\pi)\frac{2+e\cos v}{\cos^2\varphi} + \frac{\Phi\,\text{arc}\,1''}{\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{(1+e\cos v)^2}{2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)\right\} d\Psi$$

En négligeant les termes de l'ordre de l'excentricité, cette équation se réduit à l'expression suivante :

$$d(v+\pi) = (1 + 2e\cos v)\, d L_0 - 2\cos(v+\pi)\, d\Phi + 2\sin(v+\pi)\, d\Psi$$

qui est suffisamment approchée pour le cas considéré. D'après cette der-

nière, les différences de 17 longitudes vraies donnent pour la correction définitive de la longitude moyenne, calculée d'après Bessel pour le commencement de l'année 1880, + 1°27′ 24″; la longitude du périsaturnium devient 277°13′ 3″ et l'excentricité 0,026590. J'avais exclu de ce dernier calcul les longitudes dérivées des observations du 22 août, du 13 septembre, du 21 octobre et du 1er novembre, desquelles résultaient des différences trop fortes avec l'orbite de Bessel pour qu'elles puissent être attribuées à des erreurs de la théorie.

Avec ces éléments corrigés, j'ai calculé les distances apparentes ρ du satellite au centre de Saturne pour toutes les observations, dans lesquelles la coordonnée x dépasse 160″, et en faisant le demi grand axe a de l'orbite égal à l'unité. La comparaison des valeurs observées avec les valeurs calculées de ρ, a donné

$$a = 176''.889$$

La correction du mouvement diurne, enfin, provenant de la correction de + 1°27′24″ à appliquer à la longitude moyenne est égale à + 0°,000079. Il en résulte

$$\mu = 22^\circ.577053$$

et pour la durée de la révolution tropique :

$$T = 15^d\ 22^h\ 41^m\ 22^s\ 2$$

Les 17 observations employées sont représentées par cette orbite comme suit :

t		Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
		″	″	″	″	″	″
Août 14	10h 37m 35s	+ 164.21	+ 165.70	— 1.49	— 24.25	— 23.76	— 0.49
» 17	12 23 45	— 24.74	— 27.66	+ 2.92	— 48.34	— 49.87	+ 1.53
» 18	10 11 24	— 89.18	— 88.89	— 0.29	— 44.81	— 44.67	— 0.14
» 24	10 7 12	— 75.05	— 74.08	— 0.97	+ 46.39	+ 47.10	— 0.71
» 27	9 58 12	+ 137.84	+ 138.52	— 0.68	+ 33.58	+ 32.40	+ 1.18
Sept. 20	8 43 50	— 160.03	— 159.26	— 0.77	— 32.42	— 31.15	— 1.27

	t	Ox	Cx	dx	Oy	Cy	dy
		"	"	"	"	"	"
Sept. 22	9 19 40	— 205.42	— 204.56	— 0.86	+ 6.89	+ 5.68	+ 1.21
» 23	9 23 51	— 183.01	— 183.07	+ 0.06	+ 23.73	+ 24.07	— 0.34
» 24	11 11 24	— 131.70	— 130.26	— 1.44	+ 40.86	+ 39.74	+ 1.12
» 29	8 40 49	+ 187.81	+ 188.45	— 0.64	+ 11.08	+ 12.02	— 0.94
Oct.. 2	10 29 31	+ 110.77	+ 114.21	— 3.44	— 40.30	— 41.37	+ 1.07
» 10	8 15 29	— 133.55	— 135.34	+ 1.79	+ 38.01	+ 38.20	— 0.19
» 16	8 13 42	+ 194.93	+ 195.63	— 0.70	— 8.01	— 8.62	+ 0.62
Nov.. 10	11 2 3	— 169.29	— 167.78	— 1.51	+ 28.21	+ 27.81	+ 0.40
Déc.. 5	8 33 25	+ 85.94	+ 86.60	— 0.66	— 38.33	— 38.91	+ 0.58
» 6	9 47 18	+ 8.33	+ 9.40	— 1.07	— 43.81	— 43.05	— 0.76
» 11	6 52 14	— 192.87	— 192.34	— 0.53	+ 11.36	+ 11.42	— 0.06

Les instants des observations sont donnés dans ce tableau, conformément aux tables de Bessel, en temps moyen de Paris et réduits à l'instant où la lumière part de la planète.

Dans les différences des observations avec le calcul, l'influence de l'erreur de l'ajustement du cercle de position est beaucoup plus sensible que pour les autres satellites. En effet, un manque de coïncidence entre les fils fixes et les axes de l'anneau de la planète, qui est inappréciable pour une distance de 20″, la distance des extrémités de l'anneau au centre de Saturne, pourrait encore être négligeable pour les cinq premiers satellites, jusqu'à Rhéa, mais ne l'est plus pour Titan. Les différences qui restent ne montrent en tous cas point d'erreur systématique, qui exigeât une correction de l'inclinaison de l'orbite, que j'avais adoptée d'après celle de Bessel. La somme des dy devient o à très peu de chose près, si l'on forme ces différences en prenant tous les y positifs.

Détermination de la Masse de Saturne.

La formule que Bessel a employée pour déterminer la masse de Saturne, d'après le mouvement et la distance de Titan est la suivante (voir le travail déjà cité plus haut) :

$$M = \frac{\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 \sin^3 a - fm}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 \sin^3 a}$$

Dans cette formule, μ représente le mouvement moyen sidéral du satellite autour de son centre de gravitation, comme il aurait lieu si le soleil n'agissait pas sur le système de Saturne. Ce dernier augmente en apparence la force attractive de la planète, c'est-à-dire il rend le mouvement plus rapide qu'on ne le trouverait sans l'influence secondaire d'une masse perturbatrice en dehors du système des satellites. μ_1 est le mouvement moyen sidéral de Saturne autour du Soleil dans le même intervalle de temps que celui choisi pour μ; a est le demi-grand axe de l'orbite du satellite; f un facteur qui dépend des dimensions de l'anneau et de la distance du satellite; m enfin est la masse de l'anneau. Cette formule tient donc compte de l'attraction de l'anneau, mais elle néglige l'influence de l'aplatissement de la planète, que Bessel jugeait insensible quant au mouvement de Titan.

Pour les perturbations séculaires du mouvement du satellite, produites par l'attraction du Soleil, Bessel donne l'expression

$$dE = \frac{T}{T'} \frac{dv^1}{\sqrt{(1-e_1^2)^3}} \left\{ -1 + \frac{3}{2} \sin^2 i_1 + \frac{3}{4} \left[1 + e^2 - \sqrt{1-e^2} \left(-1 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{3}{2} \sin^2 i_1 - \frac{5}{2} \sin^2 i_1 \cos 2\Gamma \right) \right] \right\}$$

Ici, dE est la variation de la longitude pendant l'intervalle de temps choisi ou la quantité à retrancher d'une longitude vraie observée du satellite pour avoir la position qu'il occuperait sans l'action du Soleil. dv^1 représente le mouvement de Saturne autour du Soleil dans ce même intervalle, T et T' les durées de révolution du satellite et de la planète, e_1 l'excentricité de l'orbite de Saturne, i_1 l'inclinaison de l'orbite du satellite sur l'orbite de la planète, enfin Γ la longitude du périsatur-

nium du satellite comptée depuis le nœud. Pour cette formule, on peut écrire avec une approximation suffisante

$$dE = \frac{T}{T^1} dv_1 \left(-1 + \frac{3}{2} \sin^2 i_1\right)$$

Bessel trouvait pour Titan et pour une année

$$\frac{dE}{dt} = -46''.357 - 0''.030 \cos 2\,\Gamma$$

Or, en supposant le plan des autres satellites le même que celui de Titan pour l'évaluation de cette très faible influence de l'attraction du Soleil, j'ai pensé pouvoir mettre

$$\frac{dE}{dt} = -46''.36 \frac{T_{,,}}{T_{,}}$$

où $T_{,,}$ est le temps de révolution du satellite considéré et $T_{,}$ celui de Titan.

Pour le coefficient f, Bessel a développé la série suivante :

$$f = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho_1^4 - \rho^4) : (\rho_1^2 - \rho^2)}{a^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho_1^6 - \rho^6) : (\rho_1^2 - \rho^2)}{a^4 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho_1^8 - \rho^8) : (\rho_1^2 - \rho^2)}{a^6 (1 - e^2)^{\frac{9}{2}}} \left(1 + 3 e^2 + \frac{3}{8} e^4\right) + \text{etc.}\ldots\ldots$$

dans laquelle ρ est le demi-diamètre intérieur et ρ_1 le demi-diamètre extérieur de l'anneau de Saturne, e l'excentricité de l'orbite du satellite.

Quant à la masse de l'anneau m, Bessel en a déterminé une valeur approchée de $\frac{1}{119}$ de la masse de Saturne, par l'influence de l'attraction de l'anneau sur le mouvement de la ligne des apsides de Titan.

En suivant la marche du calcul que je viens de désigner, j'ai adopté pour m le chiffre de Bessel, pour μ' le mouvement moyen sidéral de

Saturne la valeur d'après les tables de Leverrier (voir *Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires,* tome XII, p. A 3), 12°,13′16″,11 pour une année julienne, ou 0°,03345958 dans un jour moyen.

Pour Encelade, dE devient de cette manière égal à 8′59″,6 pour une année, donc le mouvement sidéral diurne, corrigé de l'influence du Soleil, devient 262°,79077. Le coefficient f se trouve, d'après les dimensions de l'anneau, désignées dans le premier chapitre de ce travail égal à 0,1862. De ces valeurs combinées avec le demi-grand axe 46″357, il résulte que la masse de Saturne est 3533,08 fois plus petite que celle du Soleil.

La correction dE pour Téthys est égale à 6′31″,6, son mouvement moyen rectifié de cette valeur et de la précession devient alors 190°,71824; f devient égale à 0,1211; enfin, le demi-grand axe 42,480 donne la valeur réciproque de la masse de Saturne égale à 3526,14.

Pour Dioné, on obtient les chiffres suivants : $dE = 4'30'',1$; $\mu = 131°,54333$; $f = 0,0733$ et le demi-grand axe 54″,580 donne $\frac{1}{M} = 3493,17$.

Pour Rhéa, on a $dE = 2'43'',6$; $\mu = 79°,68721$; $f = 0,0379$; d'après ces données, a étant égal à 75″,968, la valeur correspondante de la masse devient égale à 3529,08.

La masse de Saturne déduite des observations de Titan diffère notablement des chiffres précédents. Elle devient avec $dE = 46'',4$; $\mu = 22°,577050$; $f = 0,0069$ et $a = 176'',889$ égale à 3481,57.

Comme les données pour cette dernière détermination sont obtenues d'après une méthode très différente que pour les quatre autres satellites, j'ai cru qu'il était logique de calculer la valeur moyenne de la masse résultant seulement des quatre premiers satellites observés, et de laisser à part le résultat tiré des observations de Titan.

Le poids relatif de chacune des quatre déterminations de la masse est égal au nombre d'observations ayant concouru au résultat, multiplié par le carré du demi-grand axe du satellite, et cela en partant de la suppo-

sition que chaque observation des différents satellites est faite avec le même degré de précision. On a donc :

	Masse.	Poids.
Encelade :	3533.08	$0.8 \times 11.6 = 9.3$
Téthys :	3526.14	$2.3 \times 17.6 = 40.5$
Dioné :	3493.17	$2.2 \times 30.2 = 66.4$
Rhéa :	3529.08	$2.1 \times 57.8 = 121.4$

Il en résulte comme valeur moyenne probable de la masse de Saturne :

$$\frac{1}{M} = \mathbf{3518.70} \pm 9.41$$

Résumé des Éléments des cinq Satellites observés.

Je reproduis dans le tableau qui suit les éléments des cinq satellites observés.

	Encelade	Téthys	Dioné	Rhéa	Titan
E	1880 Oct. 8.0	1880 Oct. 27.0	1880 Oct. 27.0	1880 Oct. 27.0	1880 Oct. 27.0
L_0	5° 18′.3	300° 2′ 11″	155° 5′ 13″	309° 42′ 52″	182° 25′ 38″
T	$1^d\ 8^h\ 52^m\ 40^s.5$	$1^d\ 21^h\ 18^m\ 8^s.4$	$2^d\ 17^h\ 40^m\ 54^s.1$	$4^d\ 12^h\ 25^m\ 25^s.4$	$15^d\ 22^h\ 41^m\ 22^s.2$
a	34″.29	42″.48	54″.58	75″.97	176″.89
	3.937	4.877	6.266	8.722	20.308
a_c	34″.29	42″.46	54″.39	—	176″.11
e	0.066235	0.006847	0.016888	0.014657	0.026590
π	181° 45′.3	204° 6′ 45″	180° 16′ 48″	239° 26′ 0″	277° 13′ 3″
Ω	127° 5′.9	113° 57′ 33″	124° 17′ 2″	127° 4′ 31″	122° 55′ 3″
i	4° 38′.0	7° 0′ 40″	6° 41′ 30″	6° 36′ 10″	6° 34′ 52″

Dans ce tableau, E est l'époque moyenne choisie, rapportée au méridien de Greenwich; L_0 la longitude moyenne du satellite à cette époque et le moment où la lumière est arrivée à la distance 9.53890 de Saturne; T est la durée de la révolution tropique; a le demi-grand axe de l'orbite, exprimé une première fois en secondes d'arc, vu de la distance 9.53890

de Saturne, une seconde fois exprimé en rayons de l'équateur de Saturne, d'après le chiffre trouvé dans la première partie de ce travail; a_0 indique cette même quantité calculée d'après la loi de Kepler, en partant de l'orbite de Rhéa; e désigne l'excentricité de l'orbite; π la longitude du périsaturnium; Ω la longitude du nœud ascendant, comptée sur l'équateur terrestre, et i l'inclinaison de l'orbite sur le plan de ce dernier.

Je ne veux pas me hasarder à tirer quelques conclusions prématurées de ces résultats provisoires, qui demandent à être vérifiés par une série ultérieure d'observations plus complètes dans l'exécution desquelles je mettrai à profit l'expérience acquise pendant l'opposition de 1880. Je me borne seulement à attirer l'attention sur ce fait singulier, que les directions du périsaturnium de tous les cinq satellites sont comprises dans un même angle droit, et que le périsaturnium du système des anneaux se trouve, d'après les observations traitées dans le premier chapitre de ce travail, dans ce même angle droit. Ce fait pourrait soulever un doute sur la coïncidence du centre de gravité du système saturnien avec le centre géométrique de la planète, ce qui pourrait être attribué à un manque d'homogénéité du corps de cette dernière dans le cas où les perturbations ne pourraient pas l'expliquer. Les excentricités des orbites trouvées géométriquement, et sans application de la loi de Newton dans les calculs précédents, ne pourraient pas représenter exactement les mouvements observés si une telle différence avait réellement lieu, et il paraît en effet que le mouvement de Dioné présente une anomalie de ce genre. Mais, je le répète, il est encore trop tôt d'ouvrir une discussion à ce sujet.

3 2044 020 807 269

32044020807269